Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Kurskod: TATA24
Provkod: TEN1

Tentamen i TATA24 Linjär Algebra

2019-04-23 kl 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Ej räknedosa.

På del A och B (uppgift 1–6) ska endast svar ges. De ska lämnas på ett gemensamt papper. *Varje uppgift på del A och B ger högst 1 poäng.*

Uppgifterna på del C (uppgift 7–10) ger högst 3 poäng per uppgift, och till dessa krävs fullständiga och välmotiverade lösningar.

För betyg 3/4/5 krävs minst 2 poäng på del A, minst 2 poäng på del B, minst 2/3/4 uppgifter på del C som bedömts med minst 2 poäng vardera, samt minst 8/12/16 poäng totalt.

Godkänd kontrollskrivning *ger 3 poäng på del A (uppgift 1–3) som då inte behöver lösas. Markera detta genom att skriva "G" i rutorna för uppgift 1–3.*

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

Nedan ges $\mathbb{R}^n$ alltid standardskalärprodukten, och standardbasen i $\mathbb{R}^n$ ses som ett höger ON-system när lämpligt.

DEL A

1. Ange alla lösningar till ekvationssystemet $\begin{cases} 3x+4y-3z=1, \\ 2x+3y-2z=2, \\ 4x+3y-3z=3. \end{cases}$

2. Betrakta vektorerna $\mathbf{u}=(1,2,0,-1)$ och $\mathbf{v}=(7,2,8,-7)$ i $\mathbb{R}^4$. Beräkna $\mathbf{v}_{\|\mathbf{u}}$, det vill säga den ortogonala projektionen av $\mathbf{v}$ på $\mathbf{u}$.

3. Bestäm arean av den triangel som har hörn i punkterna $(2,0,1)$, $(3,1,3)$ och $(5,2,2)$.

DEL B

4. Låt $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ vara standardbasen i $\mathbb{R}^2$ och sätt $\mathbf{f}_1=2\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2$ och $\mathbf{f}_2=3\mathbf{e}_1+3\mathbf{e}_2$. Beräkna koordinaterna för vektorn $5\mathbf{e}_1-2\mathbf{e}_2$ i basen $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$.

5. Den linjära avbildningen $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ har avbildningsmatris $\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$ i standardbasen. Bestäm alla F:s egenvärden och motsvarande egenrum.

6. Ange avbildningsmatrisen i standardbasen för den linjära avbildning på $\mathbb{R}^3$ som utför spegling i det plan som ges av $x_1+x_2+x_3=0$.

VÄND!

DEL C

7. Bestäm det kortaste avståndet i $\mathbb{R}^4$ mellan underrummet $\mathbb{U} = [(-1, 0, -2, 1), (3, 2, 4, -1)]$ och punkten $(3, 3, 3, 3)$.

8. Bestäm den allmänna lösningen till följande system av differentialekvationer:

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) - 3x_2(t) + 3x_3(t), \\ x_2'(t) = -2x_1(t) + 2x_3(t), \\ x_3'(t) = x_1(t) - x_2(t) + 3x_3(t). \end{cases}$$

9. Den linjära avbildningen $F : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_3$ ges av $F(p(x)) = (x-1)p'(x) - 2p(x)$ för alla polynom $p(x)$ i $\mathbb{P}_3$. ($\mathbb{P}_3$ är vektorrummet bestående av polynom vars grad är högst tre.) Bestäm en bas i $N(F)$ och en bas i $V(F)$.

10. (a) Visa att $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ om A och B är inverterbara $n \times n$-matriser. (1p)

    (b) Visa att determinanten av en godtycklig ON-matris är lika med 1 eller -1. (1p)

    (c) Antag att $F : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$ är en linjär avbildning och att $F((1, 1, 1, 1, 1)) \neq 0$. Visa att $\dim N(F) = 4$. (1p)

LYCKA TILL!