Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Kurskod: TATA24
Provkod: TEN1

Tentamen i TATA24 Linjär Algebra

2019-08-29 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel. Ej räknedosa.

På del A och B (uppgift 1–6) ska endast svar ges. De ska lämnas på ett gemensamt papper. *Varje uppgift på del A och B ger högst 1 poäng.*

Uppgifterna på del C (uppgift 7–10) ger högst 3 poäng per uppgift, och till dessa krävs fullständiga och välmotiverade lösningar.

För betyg 3/4/5 krävs minst 2 poäng på del A, minst 2 poäng på del B, minst 2/3/4 uppgifter på del C som bedömts med minst 2 poäng vardera, samt minst 8/12/16 poäng totalt.

Godkänd kontrollskrivning *ger 3 poäng på del A (uppgift 1–3) som då inte behöver lösas. Markera detta genom att skriva "G" i rutorna för uppgift 1–3.*

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

Nedan ges $\mathbb{R}^n$ alltid standardskalärprodukten, och standardbasen i $\mathbb{R}^n$ ses som ett höger ON-system när lämpligt.

DEL A

1. Bestäm (det kortaste) avståndet i $\mathbb{R}^3$ från punkten $(4, 3, -1)$ till planet som ges av ekvationen $3x_1 + x_2 - x_3 = -6$.

2. Finn minstakvadratlösningen till ekvationssystemet $\begin{cases} x_1 - x_2 = 3, \\ x_2 = 2, \\ 2x_1 - x_2 = -1. \end{cases}$

3. Låt $\mathbb{V} \subset \mathbb{R}^4$ vara lösningsrummet till ekvationssystemet $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$
   Ange en bas för $\mathbb{V}$.

DEL B

4. En linjär avbildning $F\colon\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uppfyller $F((1, 2)) = (0, 1, 2)$ och $F((1, 3)) = (4, 3, 2)$. Beräkna $F((0, 1))$.

5. Beräkna determinanten av matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

6. En linjär avbildning $F\colon\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ har i standardbasen avbildningsmatris $\begin{pmatrix} 3 & 8 & 4 \\ 2 & 5 & 0 \\ -4 & -8 & 1 \end{pmatrix}$.
   En egenvektor till F är $\mathbf{v} = (0, 1, -2)$. Vilket egenvärde hör till $\mathbf{v}$?

VÄND!

DEL C

7. Finn en ON-bas för höljet $\big[(3,1,-1,2),\ (1,3,-1,4),\ (1,-1,0,-1),\ (7,4,7,6)\big] \subset \mathbb{R}^4$.

8. Lös systemet av differentialekvationer $\begin{cases} x_1'(t) = 3x_1(t) - 2x_2(t) \\ x_2'(t) = 2x_1(t) - 2x_2(t) \end{cases}$ med begynnelsevillkoren $x_1(0) = 3$, $x_2(0) = 1$.

9. Betrakta den kvadratiska formen $Q(\underline{\mathbf{e}}X) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 7x_3^2 - x_1x_2$ på $\mathbb{R}^3$. Bestäm det största och det minsta värde som Q antar på enhetssfären. I vilka punkter antas dessa värden?

10. Den linjära avbildning $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ som har avbildningsmatrisen $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 3 & -6 \\ 6 & 2 & 3 \\ -3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ i standardbasen är en vridspegling, alltså en vridning kring en linje ℓ genom origo följd av en spegling i det plan som innehåller origo och har ℓ som normallinje.

    (a) Ange en ekvation på parameterform för ℓ.

    (b) Beräkna vridningsvinkeln $\theta \in [0, \pi]$. (Svaret får innehålla arccos.)

LYCKA TILL!