Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Kurskod: TATA24
Provkod: TEN1

Tentamen i TATA24 Linjär Algebra

2020-01-16 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel. Ej räknedosa.

På del A och B (uppgift 1–6) ska endast svar ges. De ska lämnas på ett gemensamt papper. *Varje uppgift på del A och B ger högst 1 poäng.*

Uppgifterna på del C (uppgift 7–10) ger högst 3 poäng per uppgift, och till dessa krävs fullständiga och välmotiverade lösningar.

För betyg 3/4/5 krävs minst 2 poäng på del A, minst 2 poäng på del B, minst 2/3/4 uppgifter på del C som bedömts med minst 2 poäng vardera, samt minst 8/12/16 poäng totalt.

Godkänd kontrollskrivning *ger 3 poäng på del A (uppgift 1–3) som då inte behöver lösas. Markera detta genom att skriva "G" i rutorna för uppgift 1–3.*

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

Nedan ges $\mathbb{R}^n$ alltid standardskalärprodukten, och standardbasen i $\mathbb{R}^n$ ses som ett höger ON-system när lämpligt.

DEL A

1. Vilken punkt i det plan som ges av $x_1 - x_2 + 2x_3 = -2$ ligger närmast punkten $(3, -1, 6)$?

2. Beräkna A^{-1} om $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Ange en ON-bas för det linjära höljet $[(-1, 2, 1, -1), (0, 2, 1, -2)] \subset \mathbb{R}^4$.

DEL B

4. Låt $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara ortogonal projektion på linjen som har ekvationen $3x_1 + x_2 = 0$. Bestäm F:s avbildningsmatris i standardbasen för $\mathbb{R}^2$.

5. Låt $\mathbf{f}_1 = 3\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2$ och $\mathbf{f}_2 = -\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2$, där $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ är standardbasen för $\mathbb{R}^2$. Bestäm koordinaterna för $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ i basen $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$.

6. En linjär avbildning $F : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ har avbildningsmatrisen $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ i någon bas för $\mathbb{V}$. Ange alla egenvärden för F.

VÄND!

DEL C

7. En linjär avbildning $F:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ har avbildningsmatrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ i standardbaserna. Finn en bas för nollrummet $N(F)$ och en bas för värderummet $V(F)$.

8. Låt $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$. Beräkna A^n för alla positiva heltal n.

9. Betrakta den kvadratiska formen $Q(\underline{\mathbf{e}}X) = 2x_1^2 + 8x_1x_3 + 3x_2^2 + 8x_3^2$ på $\mathbb{R}^3$.

   (a) Finn en ON-bas $\underline{\mathbf{f}}$ för $\mathbb{R}^3$ som diagonaliserar Q och ange $Q(\underline{\mathbf{f}}Y)$. (2p)

   (b) Bestäm alla nollställen till Q uttryckta i basen $\underline{\mathbf{e}}$. (Med andra ord, finn alla X sådana att $Q(\underline{\mathbf{e}}X) = 0$.) (1p)

10. Antag att $\mathbb{V}$ är ett euklidiskt rum och att $F:\mathbb{V} \to \mathbb{V}$ är linjär.

    (a) Vad är definitionen av att F är *isometrisk*? (1p)

    I (b) och (c) antar vi nu att F är isometrisk.

    (b) Visa att om $\lambda \in \mathbb{R}$ är ett egenvärde till F så gäller $\lambda = 1$ eller $\lambda = -1$. (1p)

    (c) Antag att $\mathbf{u}$ är en egenvektor till F och att $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ är ortogonal mot $\mathbf{u}$. Visa att $F(\mathbf{v})$ också är ortogonal mot $\mathbf{u}$. (1p)

LYCKA TILL!