Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Kurskod: TATA24
Provkod: TEN1

Tentamen i TATA24 Linjär Algebra

2020-03-16 kl 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Ej räknedosa.

På del A och B (uppgift 1–6) ska endast svar ges. De ska lämnas på ett gemensamt papper. *Varje uppgift på del A och B ger högst 1 poäng.*

Uppgifterna på del C (uppgift 7–10) ger högst 3 poäng per uppgift, och till dessa krävs fullständiga och välmotiverade lösningar.

För betyg 3/4/5 krävs minst 2 poäng på del A, minst 2 poäng på del B, minst 2/3/4 uppgifter på del C som bedömts med minst 2 poäng vardera, samt minst 8/12/16 poäng totalt.

Godkänd kontrollskrivning *ger 3 poäng på del A (uppgift 1–3) som då inte behöver lösas. Markera detta genom att skriva "G" i rutorna för uppgift 1–3.*

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

Nedan ges $\mathbb{R}^n$ alltid standardskalärprodukten, och standardbasen i $\mathbb{R}^n$ ses som ett höger ON-system när lämpligt.

DEL A

1. Bestäm minstakvadratlösningen till ekvationssystemet $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 - x_2 = 0, \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$

2. Beräkna inversen till matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Ange en ekvation på normalform för det plan i $\mathbb{R}^3$ som innehåller punkterna $(1, 0, 3)$, $(2, -1, 1)$ och $(1, 1, 2)$.

DEL B

4. En linjär avbildning $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ har i standardbasen avbildningsmatris $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Bestäm alla F:s egenvärden och motsvarande egenrum.

5. Beräkna determinanten av matrisen $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Låt $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara ortogonal projektion på linjen som har ekvationen $x_1 + 3x_2 = 0$. Bestäm F:s avbildningsmatris i basen $(1, 3)$, $(3, -1)$.

VÄND!

DEL C

7. Betrakta följande system av differentialekvationer:

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) - 8x_2(t), \\ x_2'(t) = -4x_1(t) + 5x_2(t). \end{cases}$$

Bestäm den lösning som uppfyller begynnelsevillkoren $x_1(0) = 5$ och $x_2(0) = 1$.

8. Låt $\mathbb{V}$ vara det linjära höljet $\big[(-1, 1, -3, 0), (-1, 0, -7, 1)\big]$ i $\mathbb{R}^4$ och låt $\mathbf{u} = (11, -4, 6, 1)$. Bestäm $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ och $\mathbf{w} \in \mathbb{V}^\perp$ sådana att $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$.

9. Den linjära avbildningen $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ har i standardbasen avbildningsmatrisen

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2\sqrt{5} & 2 \\ 2\sqrt{5} & 0 & -\sqrt{5} \\ 2 & \sqrt{5} & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Visa att F är en vridning kring en linje ℓ genom origo. (1p)

(b) Bestäm avbildningsmatrisen i standardbasen för ortogonal projektion på ℓ. (2p)

10. Ange alla matriser som är avbildningsmatriser i standardbasen för linjära avbildningar från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$ för vilka $(1, 1)$ och $(2, 3)$ är egenvektorer.

LYCKA TILL!