Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Kurskod: TATA24
Provkod: TEN1

Tentamen i TATA24 Linjär Algebra

2020-08-27 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel. Ej räknedosa.

På del A och B (uppgift 1–6) ska endast svar ges. De ska lämnas på ett gemensamt papper. *Varje uppgift på del A och B ger högst 1 poäng.*

Uppgifterna på del C (uppgift 7–10) ger högst 3 poäng per uppgift, och till dessa krävs fullständiga och välmotiverade lösningar.

För betyg 3/4/5 krävs minst 2 poäng på del A, minst 2 poäng på del B, minst 2/3/4 uppgifter på del C som bedömts med minst 2 poäng vardera, samt minst 8/12/16 poäng totalt.

Godkänd kontrollskrivning *ger 3 poäng på del A (uppgift 1–3) som då inte behöver lösas. Markera detta genom att skriva "G" i rutorna för uppgift 1–3.*

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

Nedan ges $\mathbb{R}^n$ alltid standardskalärprodukten, och standardbasen i $\mathbb{R}^n$ ses som ett höger ON-system när lämpligt.

DEL A

1. Ange (det kortaste) avståndet mellan punkten $(2, 1, 0)$ och den linje som innehåller punkterna $(2, -1, 8)$ och $(-1, -4, -1)$.

2. För vilket $a \in \mathbb{R}$ är vektorerna $(1, -1, 0, 3)$, $(3, 0, -4, -1)$ och $(-1, -2, 4, a)$ i $\mathbb{R}^4$ linjärt beroende?

3. I ett euklidiskt rum $\mathbb{V}$ gäller för $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{V}$ att $(\mathbf{u}|\mathbf{v}) = 2$ och $|\mathbf{v}| = 3$. Beräkna $\left|\mathbf{u}_{\|\mathbf{v}}\right|$, alltså längden av den ortogonala projektionen av $\mathbf{u}$ på $\mathbf{v}$.

DEL B

4. Låt $\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2$ och $\mathbf{f}_2 = 5\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, där $(\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2)$ är standardbasen för $\mathbb{R}^2$. Bestäm koordinaterna för vektorn $5\mathbf{e}_1 - 7\mathbf{e}_2$ i basen $(\mathbf{f}_1\ \mathbf{f}_2)$.

5. En linjär avbildning $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ har avbildningsmatrisen $\begin{pmatrix} 4 & a \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ i standardbasen för $\mathbb{R}^2$. Finn konstanten $a \in \mathbb{R}$ så att $(2, 3)$ blir en egenvektor för F.

6. Antag att $\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 5$. Beräkna determinanten för $\begin{pmatrix} a & 1 & 2d \\ b & 2 & 2e \\ c & 3 & 2f \end{pmatrix}$.

VÄND!

DEL C

7. Ange en ON-bas för höljet $[(1,0,2,0,1),(-2,1,-1,1,-2),(-1,5,-1,2,-3)] \subset \mathbb{R}^5$.

8. Lös systemet av differensekvationer med begynnelsevillkoren $a_0 = b_0 = c_0 = 1$:

$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n - 2b_n + 2c_n, \\ b_{n+1} = -2a_n + 3b_n - c_n, \\ c_{n+1} = -6a_n + 6b_n - 4c_n. \end{cases}$$

9. En linjär avbildning $F\colon \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_2$ definieras av $F(p(x)) = (3x+1)p''(x) - 3p'(x) + p(0)$. Finn en bas för nollrummet $N(F)$ och en bas för värderummet $V(F)$.

10. Antag att $\mathbb{V}$ är ett euklidiskt rum och att $F : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ är en linjär och symmetrisk avbildning. Låt $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$. Visa att $\mathbf{v}$ är ortogonal mot $F(\mathbf{u}) - \mathbf{u}$ för alla $\mathbf{u} \in \mathbb{V}$ om och endast om $F(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$.

LYCKA TILL!