Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Utbildningskod: TATA24
Modul: TEN1

Tentamen i TATA24 Linjär Algebra

2021-01-10 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel. Ej räknedosa.

På del A och B (uppgift 1–6) ska endast svar ges. De ska lämnas på ett gemensamt papper. *Varje uppgift på del A och B ger högst 1 poäng.*

Uppgifterna på del C (uppgift 7–10) ger högst 3 poäng per uppgift, och till dessa krävs fullständiga och välmotiverade lösningar.

För betyg 3/4/5 krävs minst 2 poäng på del A, minst 2 poäng på del B, minst 2/3/4 uppgifter på del C som bedömts med minst 2 poäng vardera, samt minst 8/12/16 poäng totalt.

Godkänd kontrollskrivning *ger 3 poäng på del A (uppgift 1–3) som då inte behöver lösas. Markera detta genom att skriva "G" i rutorna för uppgift 1–3.*

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

Nedan ges $\mathbb{R}^n$ alltid standardskalärprodukten, och standardbasen i $\mathbb{R}^n$ ses som ett höger ON-system när lämpligt.

DEL A

1. Ange alla lösningar till ekvationssystemet $\begin{cases} 2x - y - 3z = 1, \\ 3x + y - z = 6, \\ x - y + z = 6. \end{cases}$

2. Bestäm den punkt som fås då punkten $(7, 2, 0)$ speglas i det plan som har ekvationen $2x_1 - x_2 - x_3 = 0$.

3. Finn alla minstakvadratlösningar till ekvationssystemet $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 - x_2 = 2, \\ 2x_2 = 3, \\ x_1 + x_2 = 4. \end{cases}$

DEL B

4. Den linjära avbildningen $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ges av $F\big((x_1, x_2)\big) = (2x_1 - x_2, 3x_2, x_1 + 2x_2)$. Bestäm F:s avbildningsmatris i standardbaserna.

5. En linjär avbildning $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ har i standardbasen avbildningsmatris $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Ange egenvärdet för F:s egenvektor $(1, 0, -1)$.

6. Låt $(\mathbf{e}_1 \ \ \mathbf{e}_2)$ vara standardbasen för $\mathbb{R}^2$ och låt $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning som har avbildningsmatris $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ i basen $(3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \ \ 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$. Beräkna F:s avbildningsmatris i standardbasen.

VÄND!

DEL C

7. Låt $\mathbb{V}$ vara det underrum av $\mathbb{R}^4$ som spänns upp av $(1, 2, 1, 2)$ och $(2, 1, 2, 2)$. Bestäm det kortaste avståndet från $\mathbf{u} = (3, 2, 2, -2)$ till $\mathbb{V}$:s ortogonala komplement.

8. Betrakta den kvadratiska formen $Q(\underline{\mathbf{e}}X) = x_1^2 + 6\sqrt{3}\,x_1x_2 - 5x_2^2$ på $\mathbb{R}^2$. Bestäm de punkter på andragradskurvan $Q(\underline{\mathbf{e}}X) = 1$ som ligger närmast origo och ange dessa punkters avstånd till origo.

9. Låt $A = \begin{pmatrix} 8 & -15 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$. Beräkna A^n för alla heltal $n \geq 1$.

10. Låt $\mathbb{V}$ vara ett vektorrum och antag att $F : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ är en linjär avbildning sådan att $F^2 = F$ och sådan att 0 och 1 är egenvärden till F. Visa att en godtycklig vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{V}$ kan skrivas som $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$, där $\mathbf{v}$ respektive $\mathbf{w}$ tillhör F:s egenrum till egenvärdet 0 respektive 1.

LYCKA TILL!