Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Utbildningskod: TATA24
Modul: TEN1

Tentamen i TATA24 Linjär Algebra

2021-01-10 kl 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Ej räknedosa.

På del A och B (uppgift 1–6) ska endast svar ges. De ska lämnas på ett gemensamt papper. *Varje uppgift på del A och B ger högst 1 poäng.*

Uppgifterna på del C (uppgift 7–10) ger högst 3 poäng per uppgift, och till dessa krävs fullständiga och välmotiverade lösningar.

För betyg 3/4/5 krävs minst 2 poäng på del A, minst 2 poäng på del B, minst 2/3/4 uppgifter på del C som bedömts med minst 2 poäng vardera, samt minst 8/12/16 poäng totalt.

Godkänd kontrollskrivning *ger 3 poäng på del A (uppgift 1–3) som då inte behöver lösas. Markera detta genom att skriva "G" i rutorna för uppgift 1–3.*

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

Nedan ges $\mathbb{R}^n$ alltid standardskalärprodukten, och standardbasen i $\mathbb{R}^n$ ses som ett höger ON-system när lämpligt.

DEL A

1. Ange alla lösningar till ekvationssystemet $\begin{cases} 2x + 3y + z = 5, \\ x + y - z = 0, \\ 3x - y - 4z = 2. \end{cases}$

2. Bestäm den punkt som fås då punkten $(6, 5, -4)$ projiceras ortogonalt på det plan som har ekvationen $x_1 + 2x_2 - x_3 = 2$.

3. Finn alla minstakvadratlösningar till ekvationssystemet $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_2 = 0, \\ 2x_1 + x_2 = 2, \\ x_1 - x_2 = 4. \end{cases}$

DEL B

4. Avbildningen $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ är linjär och uppfyller $F\big((1,1)\big) = (3,1,0)$ och $F\big((0,1)\big) = (2,0,2)$. Bestäm F:s avbildningsmatris i standardbaserna.

5. Den linjära avbildningen $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ har avbildningsmatris $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -9 & 5 \end{pmatrix}$ i standardbasen. Ange alla egenvektorer till F.

6. En linjär avbildning $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ har i standardbasen $(\mathbf{e}_1\ \ \mathbf{e}_2)$ avbildningsmatris $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Beräkna F:s avbildningsmatris i basen $(2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\ \ 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2)$.

VÄND!

DEL C

7. Låt $\mathbb{V}$ vara det underrum av $\mathbb{R}^4$ som spänns upp av $(1, 0, 1, 2)$, $(0, 1, 0, 3)$ och $(0, 1, 2, 5)$. Bestäm den ortogonala projektionen av $\mathbf{u} = (3, 1, 1, 1)$ på $\mathbb{V}$:s ortogonala komplement.

8. Betrakta den kvadratiska formen $Q(\underline{\mathbf{e}}X) = 5x_1^2 + 2\sqrt{2}\,x_1x_2 + 4x_2^2$ på $\mathbb{R}^2$. Bestäm det största och det minsta värde som Q antar på enhetscirkeln och ange i vilka punkter på enhetscirkeln dessa värden antas.

9. Bestäm den allmänna lösningen till följande system av differentialekvationer:

$$\begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) - x_2(t) - 2x_3(t), \\ x_2'(t) = \qquad\qquad - x_2(t), \\ x_3'(t) = x_1(t) - x_2(t) - x_3(t). \end{cases}$$

10. Låt $\mathbb{V}$ vara ett vektorrum och antag att $F : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ är en linjär avbildning sådan att $F^2 = 2F$ och sådan att 2 är ett egenvärde till F. Visa att F:s värderum är lika med F:s egenrum till egenvärdet 2.

LYCKA TILL!