Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Algebra, geometri och diskret matematik

Utbildningskod: TATA24
Modul: TEN1

Tentamen i TATA24 Linjär Algebra

2021-03-14 kl 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Ej räknedosa.

På del A och B (uppgift 1–6) ska endast svar ges. De ska lämnas på ett gemensamt papper. *Varje uppgift på del A och B ger högst 1 poäng.*

Uppgifterna på del C (uppgift 7–10) ger högst 3 poäng per uppgift, och till dessa krävs fullständiga och välmotiverade lösningar.

För betyg 3/4/5 krävs minst 2 poäng på del A, minst 2 poäng på del B, minst 2/3/4 uppgifter på del C som bedömts med minst 2 poäng vardera, samt minst 8/12/16 poäng totalt.

Godkänd kontrollskrivning *ger 3 poäng på del A (uppgift 1–3) som då inte behöver lösas. Markera detta genom att skriva "G" i rutorna för uppgift 1–3.*

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

Nedan ges $\mathbb{R}^n$ alltid standardskalärprodukten, och standardbasen i $\mathbb{R}^n$ ses som ett höger ON-system när lämpligt.

DEL A

1. Bestäm en vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ som är ortogonal mot både $(1, -1, -2)$ och $(0, 1, 4)$ och dessutom uppfyller $|\mathbf{u}| = 3$.

2. Beräkna inversen till matrisen $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Punkten $(1, 2, -1)$ är den punkt i planet Π som ligger närmast punkten $(2, 4, 5)$. Bestäm en ekvation för Π på normalform.

DEL B

4. Finn alla egenvärden till matrisen $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

5. En linjär avbildning $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uppfyller $F((2, 4)) = (-1, 0, 3)$ och $F((3, 1)) = (4, 1, 1)$. Bestäm $F((1, 7))$.

6. Antag $\det \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} = 4$, $\det \begin{pmatrix} a & c \\ d & f \end{pmatrix} = 2$ och $\det \begin{pmatrix} b & c \\ e & f \end{pmatrix} = 3$. Beräkna $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$.

VÄND!

DEL C

7. Finn en ekvation på formen $y = kx + m$ för den räta linje som i minstakvadratmening bäst ansluter till följande punkter (x, y): $(-1, 0)$, $(0, 4)$, $(2, 2)$ och $(3, 2)$.

8. En linjär avbildning $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ har avbildningsmatris $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -4 & 0 \\ 2 & 6 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ i standardbaserna. Låt $G : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ ges av ortogonal projektion på nollrummet $N(F)$. Bestäm avbildningsmatrisen för G i standardbasen.

9. Lös följande system av differensekvationer med begynnelsevillkoren $a_0 = 1$, $b_0 = 2$:

$$\begin{cases} a_{n+1} = 4a_n - 2b_n, \\ b_{n+1} = 3a_n - 3b_n. \end{cases}$$

10. Betrakta följande delrum till $\mathbb{P}_3$:

$$\begin{aligned} \mathbb{U} &= \left[1 + 2x^3,\ 1 - x^2 + 3x^3,\ 1 + x^2 + x^3\right], \\ \mathbb{V} &= \left[2 + x + 4x^2,\ 1 + 2x^2 + 2x^3,\ x - x^2 - x^3\right]. \end{aligned}$$

Ange en bas för $\mathbb{U} \cap \mathbb{V}$.

LYCKA TILL!