Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Algebra, geometri och diskret matematik

Utbildningskod: TATA24
Modul: TEN1

Tentamen i TATA24 Linjär Algebra

2021-08-20 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel. Ej räknedosa.

På del A och B (uppgift 1–6) ska endast svar ges. De ska lämnas på ett gemensamt papper. *Varje uppgift på del A och B ger högst 1 poäng.*

Uppgifterna på del C (uppgift 7–10) ger högst 3 poäng per uppgift, och till dessa krävs fullständiga och välmotiverade lösningar.

För betyg 3/4/5 krävs minst 2 poäng på del A, minst 2 poäng på del B, minst 2/3/4 uppgifter på del C som bedömts med minst 2 poäng vardera, samt minst 8/12/16 poäng totalt.

Godkänd kontrollskrivning *ger 3 poäng på del A (uppgift 1–3) som då inte behöver lösas. Markera detta genom att skriva "G" i rutorna för uppgift 1–3.*

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

Nedan ges $\mathbb{R}^n$ alltid standardskalärprodukten, och standardbasen i $\mathbb{R}^n$ ses som ett höger ON-system när lämpligt.

DEL A

1. Ange alla lösningar till ekvationssystemet $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

2. Vilken punkt i det plan som ges av $2x_1 - x_2 + x_3 = 1$ ligger närmast punkten $(1, 2, 3)$?

3. För vilket $a \in \mathbb{R}$ är vektorerna $(2, -1, a, 6)$, $(0, -1, 2, 2)$ och $(1, 1, -2, 0)$ i $\mathbb{R}^4$ linjärt beroende?

DEL B

4. Beräkna determinanten för matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Bestäm alla egenvektorer till matrisen $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

6. Låt $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara ortogonal projektion på den linje som ges av $2x_1 - 3x_2 = 0$. Ange F:s avbildningsmatris i standardbasen för $\mathbb{R}^2$.

VÄND!

DEL C

7. Betrakta följande system av differentialekvationer:

$$\begin{cases} x_1'(t) = 5x_1(t) - 4x_2(t), \\ x_2'(t) = 2x_1(t) - x_2(t). \end{cases}$$

Bestäm den lösning som uppfyller begynnelsevillkoren $x_1(0) = 1$ och $x_2(0) = 0$.

8. Låt $\mathbb{U}$ vara det underrum av $\mathbb{R}^5$ som spänns upp av de tre vektorerna $(1, -1, 0, 1, 0)$, $(2, -1, 1, 1, 0)$ och $(-1, 1, -1, -1, 1)$. Bestäm en ON-bas för $\mathbb{U}$:s ortogonala komplement.

9. Den linjära avbildningen $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ har i standardbasen avbildningsmatrisen

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Visa att F är en vridning kring en linje ℓ genom origo och ange ℓ på parameterform.

10. Antag att den linjära avbildningen $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ är symmetrisk, att F har egenvärdena 0 och 3 (men inga andra egenvärden), och att F:s nollrum spänns upp av vektorn $(1, 1, 1)$. Ange F:s avbildningsmatris i standardbasen för $\mathbb{R}^3$.

LYCKA TILL!