Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Algebra, geometri och diskret matematik

Utbildningskod: TATA24
Modul: TEN1

Tentamen i TATA24 Linjär Algebra

2022-03-15 kl 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Ej räknedosa.

På del A och B (uppgift 1–6) ska endast svar ges. De ska lämnas på ett gemensamt papper. *Varje uppgift på del A och B ger högst 1 poäng.*

Uppgifterna på del C (uppgift 7–10) ger högst 3 poäng per uppgift, och till dessa krävs fullständiga och välmotiverade lösningar.

För betyg 3/4/5 krävs minst 2 poäng på del A, minst 2 poäng på del B, minst 2/3/4 uppgifter på del C som bedömts med minst 2 poäng vardera, samt minst 8/12/16 poäng totalt.

Godkänd kontrollskrivning *ger 3 poäng på del A (uppgift 1–3) som då inte behöver lösas. Markera detta genom att skriva ”G” i rutorna för uppgift 1–3.*

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

Förutom i uppgift 9 nedan, ges $\mathbb{R}^n$ alltid standardskalärprodukten, och standardbasen i $\mathbb{R}^n$ ses som ett höger ON-system när lämpligt.

DEL A

1. Finn alla lösningar till ekvationssystemet $\begin{cases} 2x + y - 2z = -2, \\ 2x - 2y + 3z = -7, \\ x + y - 3z = 1. \end{cases}$

2. Beräkna vinkeln mellan vektorerna $(1, 2, -5)$ och $(-2, 5, -1)$ i $\mathbb{R}^3$.

3. För vilket värde på konstanten $a \in \mathbb{R}$ är polynomen $1 - 2x + x^2 + 3x^3$, $4 + x + x^2 - 2x^3$ och $-2 - 5x + x^2 + ax^3$ i $\mathbb{P}_3$ linjärt beroende?

DEL B

4. Vilka koordinater har vektorn $(7, -6)$ i basen $\mathbf{f} = ((1, 3)\ (-2, 3))$ för $\mathbb{R}^2$?

5. En linjär avbildning $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uppfyller $F((1, 2)) = (-1, 0, 1)$ och $F((1, 3)) = (0, 1, 3)$. Bestäm avbildningsmatrisen för F i standardbaserna för $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$.

6. Ange en diagonalmatris D och en inverterbar matris T sådana att $A = TDT^{-1}$, där $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

VÄND!

DEL C

7. Betrakta följande delrum till $\mathbb{R}^4$:

$$\mathbb{U}_1 = [(1,-1,2,0),(1,1,2,-2),(3,2,0,1)]\,,$$
$$\mathbb{U}_2 = \left\{ (x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases} \right\}.$$

Ange en bas för snittet $\mathbb{U}_1 \cap \mathbb{U}_2$.

8. Bestäm den allmänna lösningen till systemet av differentialekvationer

$$\begin{cases} x_1'(t) = 3x_1(t) + x_2(t) - 2x_3(t), \\ x_2'(t) = -x_1(t) + x_2(t) + 2x_3(t), \\ x_3'(t) = x_1(t) + x_2(t). \end{cases}$$

9. En viss skalärprodukt[1] på $\mathbb{R}^2$ ges av $((x_1,x_2) \mid (y_1,y_2)) = 2x_1y_1 - 4x_1y_2 - 4x_2y_1 + 9x_2y_2$. Finn en ON-bas $(\mathbf{f}_1\ \mathbf{f}_2)$ för $\mathbb{R}^2$ med denna skalärprodukt, som uppfyller att $\mathbf{f}_1$ är parallell med $(1,0)$.

10. Ellipsen E i $\mathbb{R}^2$ har följande egenskaper. De punkter på E som ligger närmast origo är $(3,-4)$ och $(-3,4)$. De punkter på E som ligger längst från origo har avstånd 10 dit. Ange en ekvation för E (uttryckt i standardbasens koordinater x_1 och x_2).

LYCKA TILL!

[1] Du behöver inte bevisa att det *är* en skalärprodukt.