Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Algebra, geometri och diskret matematik

Utbildningskod: TATA24
Modul: TEN1

Tentamen i TATA24 Linjär Algebra

2022-08-19 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel. Ej räknedosa.

På del A och B (uppgift 1–6) ska endast svar ges. De ska lämnas på ett gemensamt papper. *Varje uppgift på del A och B ger högst 1 poäng.*

Uppgifterna på del C (uppgift 7–10) ger högst 3 poäng per uppgift, och till dessa krävs fullständiga och välmotiverade lösningar.

För betyg 3/4/5 krävs minst 2 poäng på del A, minst 2 poäng på del B, minst 2/3/4 uppgifter på del C som bedömts med minst 2 poäng vardera, samt minst 8/12/16 poäng totalt.

Godkänd kontrollskrivning *ger 3 poäng på del A (uppgift 1–3) som då inte behöver lösas. Markera detta genom att skriva "G" i rutorna för uppgift 1–3.*

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

Nedan ges $\mathbb{R}^n$ alltid standardskalärprodukten, och standardbasen i $\mathbb{R}^n$ ses som ett höger ON-system när lämpligt.

DEL A

1. Finn alla lösningar till ekvationssystemet $\begin{cases} x - 2y + z = 2, \\ 2x - 4y + z = 1, \\ x - 2y + 2z = 5. \end{cases}$

2. En linje ges av $(x_1, x_2, x_3) = (2+t, 1+t, 3-t)$, $t \in \mathbb{R}$. Bestäm den punkt på linjen som ligger närmast punkten $(6, 2, -1)$.

3. Bestäm inversen till matrisen $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

DEL B

4. Ange en egenvektor till matrisen $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$.

5. Låt $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildning som utför spegling i det plan som ges av $2x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Bestäm F:s avbildningsmatris i standardbasen för $\mathbb{R}^3$.

6. För vilket värde på parametern a är matrisen $\begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ *inte* inverterbar?

VÄND!

DEL C

7. Finn en ekvation på formen $y = kx + m$ för den räta linje som i minstakvadratmening bäst ansluter till följande punkter (x, y): $(-1, -1)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$ och $(2, 2)$.

8. Låt $\mathbb{U} = [(1, 0, -1, -1), (2, -1, -1, 0), (3, 0, 1, -1), (2, 1, 3, -1)] \subseteq \mathbb{R}^4$.
   (a) Bestäm en bas för $\mathbb{U}$. (1p)
   (b) Bestäm en bas för $\mathbb{U}^\perp$. (1p)
   (c) Avgör om $(1, 2, -1, -1) \in \mathbb{U}$. (1p)

9. Låt $A = \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Beräkna A^n för alla heltal $n \geq 1$.

10. Låt $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara en linjär avbildning sådan att F:s avbildningsmatris A i standardbasen för $\mathbb{R}^3$ uppfyller $A^t = -A$ och $A \neq 0$.
    (a) Visa att F:s nollrum har dimension 1. (2p)
    (b) Visa att $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 0$ om $\mathbf{u}$ tillhör F:s nollrum och $\mathbf{v}$ tillhör F:s värderum. (1p)

LYCKA TILL!