Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Algebra, geometri och diskret matematik

Utbildningskod: TATA24
Modul: TEN1

Tentamen i TATA24 Linjär Algebra

2023-01-09 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel. Ej räknedosa.

På del A och B (uppgift 1–6) ska endast svar ges. De ska lämnas på ett gemensamt papper. *Varje uppgift på del A och B ger högst 1 poäng.*

Uppgifterna på del C (uppgift 7–10) ger högst 3 poäng per uppgift, och till dessa krävs fullständiga och välmotiverade lösningar.

För betyg 3/4/5 krävs minst 2 poäng på del A, minst 2 poäng på del B, minst 2/3/4 uppgifter på del C som bedömts med minst 2 poäng vardera, samt minst 8/12/16 poäng totalt.

Godkänd kontrollskrivning *ger 3 poäng på del A (uppgift 1–3) som då inte behöver lösas. Markera detta genom att skriva "G" i rutorna för uppgift 1–3.*

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

Nedan ges $\mathbb{R}^n$ alltid standardskalärprodukten, och standardbasen i $\mathbb{R}^n$ ses som ett höger ON-system när lämpligt.

DEL A

1. Finn alla minstakvadratlösningar till ekvationssystemet $\begin{cases} x + 3y = 5, \\ x - \ \ y = 4, \\ -x + \ \ y = 2. \end{cases}$

2. Beräkna arean av den triangel som har ett hörn i origo och de båda övriga hörnen i punkterna $(1, 2, 3)$ samt $(3, 4, 5)$.

3. Bestäm inversen till matrisen $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

DEL B

4. Matrisen $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ har $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ som egenvektor. Vilket egenvärde hör den till?

5. En linjär avbildning $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uppfyller $F((2, 1)) = (1, 3)$ och $F((1, -1)) = (5, 0)$. Ange F:s avbildningsmatris i standardbasen.

6. Beräkna determinanten för matrisen $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

VÄND!

DEL C

7. Lös systemet av differensekvationer

$$\begin{cases} a_{n+1} = -a_n + b_n, \\ b_{n+1} = -12a_n + 6b_n, \end{cases}$$

för ickenegativa heltal n, med begynnelsevärdena $a_0 = 1$ och $b_0 = 2$.

8. Betrakta det linjära höljet

$$\mathbb{U} = [(1,-1,2,1),(3,-1,1,1),(3,1,1,3)] \subset \mathbb{R}^4.$$

Ange en ON-bas för $\mathbb{R}^4$ i vilken varje vektor antingen tillhör $\mathbb{U}$ eller $\mathbb{U}^\perp$.

9. En linjär avbildning $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ har i standardbasen avbildningsmatrisen

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Visa att F är en vridspegling, alltså en vridning kring en linje ℓ genom origo följd av en spegling i ℓ:s ortogonala komplement.

   (b) Bestäm en ekvation för ℓ på parameterform.

   (c) Ange vridningsvinkeln $\theta \in [0, \pi]$.

10. Den linjära och symmetriska avbildningen $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ är inte inverterbar. Två egenvektorer till F är $(1,-1,0)$ och $(1,1,-2)$, med egenvärdena -1 respektive 2. Ange F:s avbildningsmatris i standardbasen.

LYCKA TILL!