Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Algebra, geometri och diskret matematik

Utbildningskod: TATA24
Modul: TEN1

Tentamen i TATA24 Linjär Algebra

2023-03-14 kl 08.00–13.00

Inga hjälpmedel. Ej räknedosa.

På del A och B (uppgift 1–6) ska endast svar ges. De ska lämnas på ett gemensamt papper. *Varje uppgift på del A och B ger högst 1 poäng.*

Uppgifterna på del C (uppgift 7–10) ger högst 3 poäng per uppgift, och till dessa krävs fullständiga och välmotiverade lösningar.

För betyg 3/4/5 krävs minst 2 poäng på del A, minst 2 poäng på del B, minst 2/3/4 uppgifter på del C som bedömts med minst 2 poäng vardera, samt minst 8/12/16 poäng totalt.

Godkänd kontrollskrivning *ger 3 poäng på del A (uppgift 1–3) som då inte behöver lösas. Markera detta genom att skriva "G" i rutorna för uppgift 1–3.*

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

Nedan ges $\mathbb{R}^n$ alltid standardskalärprodukten, och standardbasen i $\mathbb{R}^n$ ses som ett höger ON-system när lämpligt.

DEL A

1. Beräkna vinkeln mellan vektorerna $(1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$ och $(3, 5, -8) \in \mathbb{R}^3$.

2. Lös det linjära ekvationssystemet $\begin{cases} 2x + y + 2z = 3, \\ 2x - y - z = -2, \\ x + y + 2z = -1. \end{cases}$

3. Bestäm det kortaste avståndet mellan punkten $P = (3, 3, 4)$ och planet med ekvationen $x + y - 2z = 1$.

DEL B

4. En linjär avbildning $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ har i standardbasen avbildningsmatrisen $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$. Ange F:s avbildningsmatris i basen $\underline{\mathbf{f}} = ((1, 2)\ \ (2, 5))$.

5. Ange alla värden på parametern a som gör att matrisen M_a *ej* är inverterbar, då

$$M_a = \begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ 3 & a+2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Hitta alla egenvärden till matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

VÄND!

DEL C

7. Vektorrummet $\mathbb{P}_n$ består som bekant av alla polynom (i variabeln x) som har grad $\leq n$. En linjär avbildning $F : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_3$ ges av

$$F(p(x)) = (x^2 + 2)p'(x).$$

   Bestäm F:s avbildningsmatris i standardbaserna $(1\ \ x\ \ x^2)$ respektive $(1\ \ x\ \ x^2\ \ x^3)$. Ange också baser för nollrummet $N(F)$ samt värderummet $V(F)$.

8. Den kvadratiska formen $Q((x_1, x_2, x_3)) = 2x_1^2 + x_2^2 + 12x_1x_3 - 7x_3^2$ antar ett maximum och ett minimum på enhetssfären i $\mathbb{R}^3$. Ange dessa värden samt i vilka punkter de antas.

9. Låt $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^4$ vara lösningsrummet till ekvationssystemet $\begin{cases} -x_1 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + 7x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

   Bestäm $\mathbf{u_1} \in \mathbb{U}$ och $\mathbf{u_2} \in \mathbb{U}^\perp$ så att $\mathbf{u_1} + \mathbf{u_2} = (3, -2, 1, 4)$.

10. Beräkna M^n för alla positiva heltal n, då $M = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

LYCKA TILL!