Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Algebra, geometri och diskret matematik

Utbildningskod: TATA24
Modul: TEN1

Tentamen i TATA24 Linjär Algebra

2023-08-18 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel. Ej räknedosa.

På del A och B (uppgift 1–6) ska endast svar ges. De ska lämnas på ett gemensamt papper. *Varje uppgift på del A och B ger högst 1 poäng.*

Uppgifterna på del C (uppgift 7–10) ger högst 3 poäng per uppgift, och till dessa krävs fullständiga och välmotiverade lösningar.

För betyg 3/4/5 krävs minst 2 poäng på del A, minst 2 poäng på del B, minst 2/3/4 uppgifter på del C som bedömts med minst 2 poäng vardera, samt minst 8/12/16 poäng totalt.

Godkänd kontrollskrivning *ger 3 poäng på del A (uppgift 1–3) som då inte behöver lösas. Markera detta genom att skriva "G" i rutorna för uppgift 1–3.*

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

Nedan ges $\mathbb{R}^n$ alltid standardskalärprodukten, och standardbasen i $\mathbb{R}^n$ ses som ett höger ON-system när lämpligt.

DEL A

1. Bestäm konstanterna a och b så att vektorerna $(a, -3, b) \in \mathbb{R}^3$ och $(2b, 6, 1) \in \mathbb{R}^3$ blir parallella.
2. Ange en ekvation, på normalform, för planet som innehåller punkterna $(1, 2, 0)$ och $(-1, 1, 3)$ samt är parallellt med linjen som ges av $(x_1, x_2, x_3) = (3, -1, 4) + t(0, 2, -1)$, $t \in \mathbb{R}$.
3. Delrummet $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^3$ har $\underline{\mathbf{f}} = ((3, -5, 2)\ \ (-3, 6, 2))$ som bas. Vilka koordinater har vektorn $(6, -9, 8) \in \mathbb{U}$ i basen $\underline{\mathbf{f}}$?

DEL B

4. Ange en egenvektor från varje egenrum till matrisen $\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.
5. Den linjära avbildningen $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ges av ortogonal projektion på linjen som har ekvationen $x_1 + 4x_2 = 0$. Ange F:s avbildningsmatris i standardbasen.
6. Antag att $\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = 3$. Beräkna determinanten för $\begin{pmatrix} g & h & i \\ 2a & 2b & 2c \\ d & e & f \end{pmatrix}$.

VÄND!

DEL C

7. Bestäm den lösning till systemet av differentialekvationer

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) = -12x_1(t) - 6x_2(t) \end{cases}$$

som uppfyller begynnelsevillkoren $x_1(0) = -1$ och $x_2(0) = 2$.

8. Låt $\mathcal{C}$ beteckna kurvan i $\mathbb{R}^2$ med ekvationen $-5x_1^2 + 6x_1x_2 + 3x_2^2 = 7$. Ange alla möjliga avstånd från origo till punkter på $\mathcal{C}$.

9. En linjär avbildning $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ har i standardbasen avbildningsmatrisen

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ -2 & -3 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestäm en ON-bas för $V(F)$.

(b) Visa att $N(F) = V(F)$.

10. Betrakta följande två delrum till $\mathbb{P}_3$:

$$\mathbb{U} = \left[1 + x + x^3,\ 2 + 3x^2 - x^3,\ 2 + x + 2x^2\right],$$
$$\mathbb{V} = \{p(x) \in \mathbb{P}_3 : p(0) = p(1) = 0\}.$$

Bestäm en bas för snittet $\mathbb{U} \cap \mathbb{V}$.

LYCKA TILL!