Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Algebra, geometri och diskret matematik

Utbildningskod: TATA24
Modul: TEN1

Tentamen i TATA24 Linjär Algebra

2024-03-12 kl 08–13

Inga hjälpmedel. Ej räknedosa.

På del A och B (uppgift 1–6) ska endast svar ges. De ska lämnas på ett gemensamt papper. *Varje uppgift på del A och B ger högst 1 poäng.*

Uppgifterna på del C (uppgift 7–10) ger högst 3 poäng per uppgift, och till dessa krävs fullständiga och välmotiverade lösningar.

För betyg 3/4/5 krävs minst 2 poäng på del A, minst 2 poäng på del B, minst 2/3/4 uppgifter på del C som bedömts med minst 2 poäng vardera, samt minst 8/12/16 poäng totalt.

Godkänd kontrollskrivning *ger 3 poäng på del A (uppgift 1–3) som då inte behöver lösas. Markera detta genom att skriva "G" i rutorna för uppgift 1–3.*

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

Nedan ges $\mathbb{R}^n$ alltid standardskalärprodukten, och standardbasen i $\mathbb{R}^n$ ses som ett höger ON-system när lämpligt.

DEL A

1. Planet P har ekvation

$$(x, y, z) = r(1,1,1) + s(1,2,3) \,:\, r, s \in \mathbb{R}.$$

Linjen ℓ går genom $(-1,1,2)$ och $(3,4,7)$. Bestäm den punkt där ℓ skär P.

2. Lös $AX = B$ då

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -13 \\ -3 & 1 & -11 \\ 2 & -5 & 16 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ -8 \end{pmatrix}$$

3. Låt $\mathbf{a} = (2, 0, -3) \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{b} = (0, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$. Bestäm någon $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ som har längd ett och är ortogonal mot såväl $\mathbf{a}$ som mot $\mathbf{b}$.

DEL B

4. Ange samtliga egenvärden till

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

5. Den linjära avbildningen $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ har avbildningsmatris $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ i standardbasen $\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix}$. Vilken matris har den i basen $\begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 & 3\mathbf{e}_1 - 1\mathbf{e}_2 \end{pmatrix}$?

6. Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = AB$.

Då är $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en egenvektor till C; vilket egenvärde hör den till?

VÄND!

DEL C

7. Den kvadratiska formen $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 6x_1x_2$ antar ett maximum och ett minimum på cirkeln $x_1^2 + x_2^2 = 3$. Ange dessa värden samt var de antas.

8. Låt $\mathbf{v} = (1, -2, 3, -4) \in \mathbb{R}^4$. Låt delrummet $U \subset \mathbb{R}^4$ spännas upp av de tre vektorerna

$$\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1, 1),\ \mathbf{u}_2 = (3, 3, 3, 1),\ \mathbf{u}_3 = (1, 1, 0, 0).$$

   Visa att $\mathbf{v} \notin U$, och bestäm den vektor i U som har det kortaste avståndet till $\mathbf{v}$.

9. Lös systemet av ordinära differentialekvationer

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= -4x_1(t) + 2x_2(t) \\ x_2'(t) &= -7x_1(t) + 4x_2(t) - x_3(t) \\ x_3'(t) &= \quad 4x_1(t) - 2x_2(t) \end{aligned}$$

10. Om konstanterna $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ väljs rätt så blir

$$M = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ b & c & d \\ 3 & e & f \end{pmatrix}$$

   avbildningsmatrisen (m.a.p. standardbasen för $\mathbb{R}^3$) för en linjär avbildning som är ortogonal projektion på en linje ℓ genom origo. Bestäm detta val av konstanter, samt linjen ℓ.

LYCKA TILL!