Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Algebra, geometri och diskret matematik

Utbildningskod: TATA24
Modul: TEN1

Tentamen i TATA24 Linjär Algebra

2024-08-23 kl 14–19

Inga hjälpmedel. Ej räknedosa.

På del A och B (uppgift 1–6) ska endast svar ges. De ska lämnas på ett gemensamt papper. *Varje uppgift på del A och B ger högst 1 poäng.*

Uppgifterna på del C (uppgift 7–10) ger högst 3 poäng per uppgift, och till dessa krävs fullständiga och välmotiverade lösningar.

För betyg 3/4/5 krävs minst 2 poäng på del A, minst 2 poäng på del B, minst 2/3/4 uppgifter på del C som bedömts med minst 2 poäng vardera, samt minst 8/12/16 poäng totalt.

Godkänd kontrollskrivning *ger 3 poäng på del A (uppgift 1–3) som då inte behöver lösas. Markera detta genom att skriva "G" i rutorna för uppgift 1–3.*

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

Nedan ges $\mathbb{R}^n$ alltid standardskalärprodukten, och standardbasen i $\mathbb{R}^n$ ses som ett höger ON-system när lämpligt.

DEL A

1. För vilket värde på konstanten a är linjen ℓ_a, som går genom $(3,-1,2)$ och har riktningsvektor $(1,2,a)$, parallell med planet Π, som ges av ekvationen $x_1+x_2+2x_3=7$?
2. Bestäm en ON-bas för $\mathbb{R}^2$ i vilken den första basvektorn är parallell med $(3,5)$.
3. Beräkna arean för den triangel som har hörn i punkterna $(3,5,7)$, $(4,6,8)$, och $(3,3,3)$.

DEL B

4. Bestäm determinanten till matrisen
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$
5. Bestäm avbildningsmatrisen i standardbasen för den linjära avbildning $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ som ges av spegling i den linje som har ekvation $x_1+2x_2=0$.
6. Ange koordinaterna för polynomet $p(x)=3x^2+x-1\in\mathbb{P}_2$ med avseende på basen
$$(x^2+x+1 \quad x+1 \quad x+2).$$

VÄND!

DEL C

7. Låt $U = [(1,2,1,2),(2,1,2,1)] \subset \mathbb{R}^4$. Bestäm en ON-bas för $\mathbb{R}^4$ sådan att varje vektor i denna bas ligger i U eller i $U^{\perp}$.

8. För varje $a \in \mathbb{R}$ definierar vi den kvadratiska formen

$$Q_a(x,y) = (a+2)x^2 + 2axy + (a+2)y^2.$$

   (a) För vilka värden på parametern a är Q_a positivt definit?

   (b) Nu låter vi $a = 2$. Ange minimum och maximum av $Q_2(x,y)$ då (x,y) ligger på enhetscirkeln i $\mathbb{R}^2$, samt var dessa antas.

9. Den linjära avbildningen $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ har (i standardbasen) avbildningsmatrisen

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 & 8 & 4 \\ -8 & 1 & -4 \\ 4 & 4 & -7 \end{pmatrix}.$$

   Visa att F är en vridspegling, det vill säga spegling i ett plan, följd av vridning runt planets normallinje (genom origo). Ange detta plan, samt vridningsvinkeln.

10. Antag att V är ett vektorrum med $\dim(V) = n < \infty$ och att den linjära avbildningen $F : V \to V$ har samma avbildningsmatris i varje bas för V. Visa att det finns en konstant $k \in \mathbb{R}$ sådan att $F(\mathbf{v}) = k\mathbf{v}$ för alla $\mathbf{v} \in V$.

    Du får delpoäng om du kan visa detta i specialfallet då $n = 2$, eller för fallet då F är diagonaliserbar.

    Ledning för det allmänna fallet: om $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ inte är en egenvektor så är $\{\mathbf{v}, F(\mathbf{v})\}$ en linjärt oberoende mängd. Alltså finns det en bas $(\mathbf{v}\ F(\mathbf{v})\ \cdots)$. Hur ser avbildningsmatrisen ut i denna bas? Hur ser den ut i basen $(2\mathbf{v}\ F(\mathbf{v})\ \cdots)$?

LYCKA TILL!