Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Algebra, geometri och diskret matematik

Utbildningskod: TATA24
Modul: TEN1

Tentamen i TATA24 Linjär Algebra

2025-01-13 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel. Ej räknedosa.

På del A och B (uppgift 1–6) ska endast svar ges. De ska lämnas på ett gemensamt papper. *Varje uppgift på del A och B ger högst 1 poäng.*

Uppgifterna på del C (uppgift 7–10) ger högst 3 poäng per uppgift, och till dessa krävs fullständiga och välmotiverade lösningar.

För betyg 3/4/5 krävs minst 2 poäng på del A, minst 2 poäng på del B, minst 2/3/4 uppgifter på del C som bedömts med minst 2 poäng vardera, samt minst 8/12/16 poäng totalt.

Godkänd kontrollskrivning *ger 3 poäng på del A (uppgift 1–3) som då inte behöver lösas. Markera detta genom att skriva "G" i rutorna för uppgift 1–3.*

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

Nedan ges $\mathbb{R}^n$ alltid standardskalärprodukten, och standardbasen i $\mathbb{R}^n$ ses som ett höger ON-system när lämpligt.

DEL A

1. Planet Π innehåller punkten $(2, 0, -1)$ och är ortogonalt mot linjen som har ekvationen $(x_1, x_2, x_3) = (1 - t, 3 + 3t, 7t)$, $t \in \mathbb{R}$. Ange en ekvation för Π på normalform.

2. Låt $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Bestäm en matris X sådan att $XA = B$.

3. Finn alla minstakvadratlösningar till ekvationssystemet $\begin{cases} x + 2y = -3, \\ -3x - y = -6, \\ x + y = 6. \end{cases}$

DEL B

4. Den linjära avbildningen $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ges av ortogonal projektion på den linje som har ekvationen $x_1 + 3x_2 = 0$. Bestäm F:s avbildningsmatris i standardbasen.

5. Ange alla värden på konstanten $a \in \mathbb{R}$ för vilka matrisen $\begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & a \end{pmatrix}$ saknar invers.

6. Matrisen $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$ har $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ som egenvektor. Vilket egenvärde hör den till?

VÄND!

DEL C

7. Betrakta det linjära höljet $\mathbb{U} = [(1,1,-4,-1),(0,3,-8,-3),(3,-3,4,3)] \subseteq \mathbb{R}^4$.

   (a) Ange en ON-bas för $\mathbb{U}$.

   (b) Ange en bas för det ortogonala komplementet $\mathbb{U}^\perp$.

   (c) Avgör om det är sant att $(4,4,3,-4) \in \mathbb{U}^\perp$.

8. Lös systemet av differensekvationer

$$\begin{cases} a_{n+1} = 4a_n - 2b_n, \\ b_{n+1} = a_n + b_n, \end{cases}$$

   där $n \in \{0,1,2,\ldots\}$ och $a_0 = 1$, $b_0 = 0$.

9. Den linjära avbildningen $F\colon\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ har i standardbasen avbildningsmatrisen

$$\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 6 & -2 \\ 6 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & -6 \end{pmatrix}.$$

   (a) Visa att F är en vridning kring en linje ℓ genom origo.

   (b) Ange en ekvation för ℓ på parameterform.

   (c) Bestäm vridningsvinkeln $\theta \in [0,\pi]$.

10. Den linjära avbildningen $F\colon\mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ ges av $F(p(x)) = (x+1)^2 p''(x) + p'(x)$.

   (a) Bestäm F:s egenvärden samt baser för de tillhörande egenrummen. Avgör också om F är diagonaliserbar. (2p)

   (b) Ange en bas för nollrummet $N(F)$ och en bas för värderummet $V(F)$. (1p)

LYCKA TILL!