Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Algebra, geometri och diskret matematik

Utbildningskod: TATA24
Modul: TEN1

Tentamen i TATA24 Linjär Algebra

2025-08-22 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel. Ej räknedosa.

På del A och B (uppgift 1–6) ska endast svar ges. De ska lämnas på ett gemensamt papper. *Varje uppgift på del A och B ger högst 1 poäng.*

Uppgifterna på del C (uppgift 7–10) ger högst 3 poäng per uppgift, och till dessa krävs fullständiga och välmotiverade lösningar.

För betyg 3/4/5 krävs minst 2 poäng på del A, minst 2 poäng på del B, minst 2/3/4 uppgifter på del C som bedömts med minst 2 poäng vardera, samt minst 8/12/16 poäng totalt.

Godkänd kontrollskrivning *ger 3 poäng på del A (uppgift 1–3) som då inte behöver lösas. Markera detta genom att skriva "G" i rutorna för uppgift 1–3.*

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

Förutom i uppgift 9 ges $\mathbb{R}^n$ alltid standardskalärprodukten, och standardbasen i $\mathbb{R}^n$ ses som ett höger ON-system när lämpligt.

DEL A

1. Ange en ekvation på normalform för det plan som innehåller punkterna $(3,0,-1)$, $(-1,1,0)$ och $(4,1,-2)$.

2. Linjen ℓ ges av $(x_1,x_2,x_3) = (-4+3t, 7-2t, 6-t)$, $t \in \mathbb{R}$. Beräkna (det kortaste) avståndet mellan ℓ och punkten $(1,3,1)$.

3. Finn alla minstakvadratlösningar till ekvationssystemet $\begin{cases} x - y = 0, \\ 2x - y = 2, \\ -3x + 2y = 1. \end{cases}$

DEL B

4. Den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uppfyller $F((1,2)) = (0,2)$ och $F((1,1)) = (3,1)$. Bestäm F:s avbildningsmatris i standardbasen.

5. Beräkna determinanten för matrisen $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

6. Den linjära avbildningen $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ har avbildningsmatrisen $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ i standardbasen. Ange F:s avbildningsmatris i basen $((1,1)\ \ (2,3))$.

VÄND!

DEL C

7. Låt $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Finn alla X som uppfyller $AX^{-1}B^t = 2B^{-1}$.

8. Låt $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$. Beräkna A^n för alla positiva heltal n.

9. I denna uppgift förses $\mathbb{R}^3$ och dess delrum *inte* med standardskalärprodukten, utan med den skalärprodukt[1] som ges av

$$((x_1, x_2, x_3) \mid (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + x_1y_3 + 2x_2y_2 + x_3y_1 + 3x_3y_3.$$

   Låt $\mathbb{U} = [(1, 1, 1), (0, 2, 3)] \subseteq \mathbb{R}^3$. Bestäm en ON-bas för $\mathbb{U}$.

10. Den linjära avbildningen $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ har egenvärdena 1 och 3. Egenrummet som hör till 1 är

$$\mathbb{E}_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 = 0\}$$

   och egenrummet som hör till 3 är

$$\mathbb{E}_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 = 0 \text{ och } x_3 = 0\}.$$

   Ange avbildningsmatrisen för F i standardbasen.

LYCKA TILL!

[1]Du behöver inte visa att detta *är* en skalärprodukt.