

Tentamen i TATA24 Linjär Algebra

2026-01-17 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel. Ej räknedosa.

På del A och B (uppgift 1–6) ska endast svar ges. De ska lämnas på ett gemensamt papper. Varje uppgift på del A och B ger högst 1 poäng.

Uppgifterna på del C (uppgift 7–10) ger högst 3 poäng per uppgift, och till dessa krävs fullständiga och välmotiverade lösningar.

För betyg 3/4/5 krävs minst 2 poäng på del A, minst 2 poäng på del B, minst 2/3/4 uppgifter på del C som bedömts med minst 2 poäng vardera, samt minst 8/12/16 poäng totalt.

Godkänd kontrollskrivning ger 3 poäng på del A (uppgift 1–3) som då inte behöver lösas. Markera detta genom att skriva "G" i rutorna för uppgift 1–3.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

Nedan ges $\mathbb{R}^n$ alltid standardskalärprodukten, och standardbasen i $\mathbb{R}^n$ ses som ett höger ON-system när lämpligt.

DEL A

- Beräkna vinkeln mellan vektorerna $(1, 3, -2)$ och $(2, -1, 0)$ i $\mathbb{R}^3$.
- Vilken punkt i planet som ges av $x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2$ ligger närmast punkten $(6, -8, 4)$?
- Linjen ℓ_1 innehåller punkterna $(-2, -1, 1)$ och $(-1, 0, 3)$. Linjen ℓ_2 innehåller punkterna $(1, 3, k)$ och $(1, 4, k + 1)$, där $k \in \mathbb{R}$ är en konstant. För vilket värde på k skär ℓ_1 och ℓ_2 varandra?

DEL B

- Ange alla värden på konstanten $a \in \mathbb{R}$ för vilka de tre vektorerna $(-2, 1, 1)$, $(1, a, 1)$ och $(1, 1, a)$ inte spänner upp $\mathbb{R}^3$.
- För den linjära avbildningen $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gäller det att $F((1, 1)) = (1, 0, -2)$ och $F((0, 2)) = (4, -4, 2)$. Bestäm F 's avbildningsmatris i standardbaserna.
- Matrisen $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ har 2 som egenvärde. Finn en egenvektor till A .

VÄND!

DEL C

7. Låt $\mathbb{U} = [(1, 0, -1, 1), (5, 2, 3, 1), (5, 6, 1, -1)] \subseteq \mathbb{R}^4$.

- (a) Ange en ON-bas för $\mathbb{U}$.
- (b) Bestäm $\mathbf{u} \in \mathbb{U}$ och $\mathbf{v} \in \mathbb{U}^\perp$ sådana att $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (-1, 4, -1, 3)$.

8. Den linjära avbildningen $F: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ har avbildningsmatrisen
$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
 i standardbasen. Finn en bas för $N(F) \cap V(F)$.

9. En kvadratisk form $Q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ges av $Q((x_1, x_2, x_3)) = 3x_1x_3 + x_2^2$.

- (a) Vilken teckenkaraktär har Q ?
- (b) Bestäm det största och det minsta värde som Q antar på enhetssfären i $\mathbb{R}^3$.
- (c) Vilket är det minsta avstånd till origo som en punkt på ytan $\{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3 : Q(\mathbf{u}) = 4\}$ kan ha?

10. Den linjära avbildningen $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ har avbildningsmatrisen $\frac{1}{25} \begin{pmatrix} 9 & 20 & -12 \\ 20 & 0 & 15 \\ -12 & 15 & 16 \end{pmatrix}$ i standardbasen. Visa att F är spegling i ett plan och ange en ekvation på normalform för detta plan.

LYCKA TILL!