

Tentamen i TATA24 Linjär Algebra

2026-03-16 kl 08.00–13.00

Inga hjälpmedel. Ej räknedosa.

På del A och B (uppgift 1–6) ska endast svar ges. De ska lämnas på ett gemensamt papper. Varje uppgift på del A och B ger högst 1 poäng.

Uppgifterna på del C (uppgift 7–10) ger högst 3 poäng per uppgift, och till dessa krävs fullständiga och välmotiverade lösningar.

För betyg 3/4/5 krävs minst 2 poäng på del A, minst 2 poäng på del B, minst 2/3/4 uppgifter på del C som bedömts med minst 2 poäng vardera, samt minst 8/12/16 poäng totalt.

Godkänd kontrollskrivning ger 3 poäng på del A (uppgift 1–3) som då inte behöver lösas. Markera detta genom att skriva "G" i rutorna för uppgift 1–3.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

Nedan ges $\mathbb{R}^n$ alltid standardskalärprodukten, och standardbasen i $\mathbb{R}^n$ ses som ett höger ON-system när lämpligt.

DEL A

- Bestäm alla vektorer i $\mathbb{R}^3$ som är ortogonala mot såväl $(2, 2, 1)$ som $(0, 1, 1)$, och som har längd 3.
- Bestäm (det minsta) avståndet mellan punkten $(7, -4)$ och den linje i $\mathbb{R}^2$ som ges av ekvationen $x_1 - 2x_2 = 0$.
- Ange alla minstakvadratlösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x - 3y = 8, \\ 2x - y = 6, \\ -x + y = -8. \end{cases}$$

DEL B

- Låt $F: \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_2$ vara den linjära avbildningen given av $F(p(x)) = \frac{d}{dx}((x+1)p(x))$, d.v.s. F agerar på polynomet $p(x)$ genom att först multiplicera med $x+1$, sedan derivera resultatet. Ange F 's avbildningsmatris i standardbasen $(1 \ x \ x^2)$ för $\mathbb{P}_2$.
- Låt $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara ortogonal projektion på planet med ekvationen $x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0$. Ange en bas för nollrummet $N(F)$.
- Finn en egenvektor till matrisen $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

VÄND!

DEL C

7. Antag att $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ är den linjära avbildning som har matrisen M som avbildningsmatris i standardbaserna, med

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Finn en ON-bas för $\mathbb{R}^4$ i vilken varje basvektor antingen tillhör $V(F)$ eller $V(F)^\perp$.

8. Ange alla matriser X som löser matrisekvationen $(3B + AXB^{-1})^t = -B^t$, där

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 4 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 5 & -4 & 5 \end{pmatrix} \text{ och } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Betrakta följande system av differentialekvationer:

$$\begin{cases} x'(t) = -4x(t) + 6y(t), \\ y'(t) = 6x(t) - 9y(t). \end{cases}$$

- (a) Bestäm alla lösningar.
- (b) Ange alla reella konstanter a och b som gör att den lösning till systemet som uppfyller villkoren $x(0) = a$ och $y(0) = b$ är konstant.

10. Betrakta matriserna $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ och $C = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$.

Låt $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning som har avbildningsmatrisen A i standardbasen.

- (a) Visa att det inte finns någon bas för $\mathbb{R}^2$ i vilken B är F 's avbildningsmatris.
- (b) Ange en bas för $\mathbb{R}^2$ i vilken C är F 's avbildningsmatris.

LYCKA TILL!