Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Ulf Janfalk

Utbildningskod: TATA31
Modul: TEN1

Tentamen i Linjär algebra (TATA31/TEN1) 2024–08–23, 14–19.

Inga hjälpmedel, förutom passare, linjal eller gradskiva. OBS! Inga formler eller liknande tryckta på linjal eller gradskiva. Ej räknedosa.
För godkänt räcker 9 poäng och minst 3 uppgifter med 2 eller 3 poäng. Godkänd kontrollskrivning ($\geq$ 11p) ht2023 ger 3 poäng på uppgift 1 (som alltså inte behöver lösas) och 16p eller mer ger 4 poäng på uppgift 1. Markera detta genom att skriva "G" respektive "G+1" i rutan för uppgift 1 på raden märkt "X här/*here*".
Fullständiga motiveringar krävs. Lösningar läggs ut senast måndag 26/8 på

http://courses.mai.liu.se/GU/TATA31/tentor.html

Resultat meddelas via e-post inom 15 arbetsdagar.
Alla koordinater för vektorer och punkter är, om ej annat anges, givna med avseende på ett positivt orienterat ON-system, $\mathbb{R}^n$ är ett euklidiskt rum med standardskalärprodukten och standardbasen ett positivt orienterat ON-system.

(2 p) 1. (a) Ange, på parameterform, skärningslinjen mellan planen Π_1: $x - 2y + 3z = 7$ och Π_2:$2x + y + z = 4$. Ange därefter skärningslinjens skärningspunkt med planet Π_3: $3x + 2y + 2z = 6$.

(1 p) (b) Låt $a, b \in \mathbb{R}$ och

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & a \\ 3 & b \end{pmatrix}.$$

Bestäm, om möjligt, a, b så att $\quad AB = BA$.

2. Betrakta polynomen

$$\mathbf{p}_1 = 1 + 2x + x^3, \quad \mathbf{p}_2 = -2 + x^2 + 2x^3, \quad \mathbf{p}_3 = 2 - x + 4x^2,$$
$$\mathbf{p}_4 = 1 + x + 5x^2 + 5x^3, \quad \mathbf{p}_5 = 11 + x - 3x^3.$$

Ange en bas för $\mathbb{P}_3$ där så många som möjligt av $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_5$ ingår. Ange därefter koordinaterna för det/de polynom som inte kom med i basen, i den bas du valt.

3. Ange en ON-bas i

$$\mathbb{U} = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \colon \begin{array}{r} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{array} \right\}$$

och fyll sedan ut denna till en ON-bas i $\mathbb{R}^4$. Bestäm avtåndet mellan $\mathbf{v} = (1, 1, 1, 1)$ och $\mathbb{U}$.

4. Den linjära avbildningen $F \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ har i standardbasen matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Bestäm en bas i $N(F)$ respektive $N(F^2)$ samt en bas i $V(F)$ respektive $V(F^2)$. Har $N(F)$ och $V(F)$ något gemensamt element förutom $\mathbf{0}$?

5. Låt $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3)$ och $Q(\mathbf{u}) = 7x_1^2 - 8x_1x_2 - 10x_1x_3 - 2x_2^2 - 8x_2x_3 + 7x_3^2$.

(1 p) (a) Bestäm max- och minvärde för $Q(\mathbf{u})$ då $|\mathbf{u}| = \sqrt{2}$.

(2 p) (b) Bestäm (kortaste) avståndet från ytan $Q(\mathbf{u}) = 3$ till origo samt de punkter på ytan som har detta avstånd till origo.

6. Låt $A = \begin{pmatrix} 9 & -10 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$. Bestäm talet $a > 0$ så att

$$\lim_{n\to\infty} a^{-n} A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

existerar och är nollskilt (n = heltal). Ange gränsvärdet och vad detta och a har med A att göra.

7. Låt $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara en linjär avbildning och låt $A_{\underline{\mathbf{e}}}$ vara F:s matris i basen $\underline{\mathbf{e}}$. Det så kallade *spåret* av en matris B definieras som summan av diagonalelementen och betecknas $\mathrm{tr}(B)$. Om, t.ex. $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ så är spåret, $\mathrm{tr}(B) = 1+5+9 = 15$.

(a) Betrakta sekularpolynomet $p(\lambda)$ till F, d.v.s.

$$p(\lambda) = \det\left(A_{\underline{\mathbf{e}}} - \lambda I\right) = -\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0.$$

Visa att $a_2 = \mathrm{tr}(A_{\underline{\mathbf{e}}})$.
Ledning: Visa först att påståendet stämmer för matrisen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 1 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 1 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

så kommer du nog på hur du skall visa det.

(b) Låt $A_{\underline{\mathbf{f}}}$ vara matris till F i en annan bas $\underline{\mathbf{f}}$. Visa att $A_{\underline{\mathbf{e}}}$ och $A_{\underline{\mathbf{f}}}$ har samma sekularpolynom, d.v.s. att

$$\det\left(A_{\underline{\mathbf{e}}} - \lambda I\right) = \det\left(A_{\underline{\mathbf{f}}} - \lambda I\right)$$

och därmed att $\mathrm{tr}(A_{\underline{\mathbf{e}}}) = \mathrm{tr}(A_{\underline{\mathbf{f}}})$ enligt (a).

Lösningsförslag till TATA31, Linjär algebra, 2024–08–23.

1. (a) Vi börjar med skärningslinjen.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 7 \\ 2x + y + z = 4 \end{cases} \overset{r_2-2r_1}{\iff} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & 5 & -5 & -10 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2/5 \\ r_1+2r_2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right) \implies$$

$$\implies L\colon\ \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3-t \\ -2+t \\ t \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Insättning av L i ekvationen för Π_3 ger

$$3(3-t) + 2(-2+t) + 2t = 5 + t = 6 \iff t = 1 \implies$$

$$\begin{matrix}\text{skärningspunktens} \\ \text{ortsvektor}\end{matrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

d.v.s. skärningspunkten är $(2, -1, 1)$.

(b) Beräkna de båda matrisprodukterna

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & a \\ 3 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & a+2b \\ 6 & 3a+4b \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} -2+3a & -4+4a \\ 3+3b & 6+4b \end{pmatrix},$$

$$AB - BA = \begin{pmatrix} 6-3a & -3a+2b+4 \\ 3-3b & 3a-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Här ser vi direkt att $a = 2, b = 1$. Insättning i $-3a + 2b + 4$ ger $-3\cdot 2 + 2\cdot 1 + 4 = -6 + 2 + 4 = 0$ så $AB = BA$ omm $a = 2, b = 1$.

2. Vi börjar med beroendeekvationen och "L.K = godt. polynom" i händelse av att vi skulle behöva fylla ut för att få en bas i $\mathbb{P}_3$. Vi får

$$\lambda_1\mathbf{p}_1 + \lambda_1\mathbf{p}_2 + \ldots + \lambda_1\mathbf{p}_5 = \mathbf{0}, a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \iff$$

$$\iff \left(\begin{array}{ccccc|c|c} 1 & -2 & 2 & 1 & 11 & 0 & a_0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 0 & 0 & a_2 \\ 1 & 2 & 0 & 5 & -3 & 0 & a_3 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2-2r_1 \\ r_4-r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|cc} 1 & -2 & 2 & 1 & 11 & 0 & a_0 \\ 0 & 4 & -5 & -1 & -21 & 0 & -2a_0+a_1 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 4 & -2 & 4 & -14 & 0 & -a_0+a_3 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2-4r_3 \\ r_4-4r_3}}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|cc} 1 & 0 & 4 & 11 & 11 & 0 & a_0+2a_2 \\ 0 & 0 & -21 & -21 & -21 & 0 & -2a_0+a_1-4a_2 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & -18 & -16 & -14 & 0 & -a_0-4a_2+a_3 \end{array}\right)$$

Här syns nu att vi inte kommer behöva fylla ut med något polynom eftersom vi inte kommer få någon nollrad. Därmed har vi ingen användning av "L.K = godt. polynom" och fortsätter kalkylen utan den sista kolonnen. Vi får då

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 4 & 11 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & -21 & -21 & -21 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -18 & -16 & -14 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{-r_2/21 \\ r_2\leftrightarrow r_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 & 11 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -18 & -16 & -14 & 0 \end{array}\right) \overset{(/r_4+18r_3)/2}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 & 11 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Lösningen på beroendeekvationen blir då

$$\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\\\lambda_4\\\lambda_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\lambda_2-2\lambda_3-\lambda_4-11\lambda_5=-2t+2t-12t=t\\-4\lambda_3-5\lambda_4=-4t+10t=6t\\-\lambda_4-\lambda_5=2t-t=t\\-2t\\t\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}1\\6\\1\\-2\\1\end{pmatrix},\quad t\in\mathbb{R}\overset{t=1}{\Longrightarrow}$$

$$\Longrightarrow \mathbf{p}_5=-\mathbf{p}_1-6\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_3+2{\cdot}\mathbf{p}_4 \tag{1}$$

och vi kan, t.ex. utse $\mathbf{p}_5$ till löjligt element. Då $\dim\mathbb{P}_3=4$ och vi har fyra linjärt oberoende element är dessa en bas i $\mathbb{P}_3$ enligt Satsen om rätt antal element, **Sats 5.4.19**, sid 121. Då koordinaterna relativt en given bas är konstanterna i den linjärkombination av basvektorerna som ger den givna vektorn följer det ur (1) att $\mathbf{p}_5$:s koordinater i den givna basen är $-1,-6,-1,2$.

3. Vi börjar med att bestämma en bas i $\mathbb{U}$ genom att lösa ekvationssystemet

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&1&2&0\\2&1&-1&1&0\end{array}\right)\overset{r_2-2r_1}{\sim}\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&1&2&0\\0&3&-3&-3&0\end{array}\right)\overset{\substack{r_2/3\\r_1+r_2}}{\sim}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&1&0\\0&1&-1&-1&0\end{array}\right)\Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-t\\s+t\\s\\t\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}=s\mathbf{u}_1+t\mathbf{u}_2\quad s,t\in\mathbb{R}.$$

Sätt

$$\mathbf{f}_1=\frac{\mathbf{u}_1}{|\mathbf{u}_1|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix},\ \mathbf{u}_{2_{\|\mathbf{f}_1}}=\frac{1}{2}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u}_{2_{\perp\mathbf{f}_1}}=\mathbf{u}_2-\mathbf{u}_{2_{\|\mathbf{f}_1}}=\frac{1}{2}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-2\\2\\0\\2\end{pmatrix}-\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{2}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\\2\end{pmatrix},\ \mathbf{f}_2=\frac{1}{\sqrt{10}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\\2\end{pmatrix}.$$

Som utfyllnad väljer vi en bas i $\mathbb{U}^\perp$. Denna fås enklast genom att läsa av "normalerna" ur de ekationer som genererar $\mathbb{U}$, d.v.s. $\mathbf{u}_3=(1,-1,1,2)$ och $\mathbf{u}_4=(2,1,-1,1)$. Sätt

$$\mathbf{f}_3=\frac{\mathbf{u}_3}{|\mathbf{u}_3|}=\frac{1}{\sqrt{7}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\2\end{pmatrix},\ \mathbf{u}_{4_{\|\mathbf{f}_3}}=\frac{1}{7}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\1\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\2\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\2\end{pmatrix}=\frac{2}{7}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\2\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u}_{4_{\perp\mathbf{f}_3}}=\mathbf{u}_4-\mathbf{u}_{4_{\|\mathbf{f}_3}}=\frac{1}{7}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}14\\7\\-7\\7\end{pmatrix}-\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\-2\\2\\4\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{7}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}12\\9\\-9\\3\end{pmatrix}=\frac{3}{7}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}4\\3\\-3\\1\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f}_4=\frac{1}{35}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}4\\3\\-3\\1\end{pmatrix}$$

och $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4$ är en ON-bas i $\mathbb{R}^4$.
Återstår att beräkna avståndet mellan $\mathbf{v} = (1,1,1,1)$ och $\mathbb{U}$.

$$\max_{\mathbf{u}\in\mathbb{U}} |\mathbf{v}-\mathbf{u}| = \left|\mathbf{v}-\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}}\right| = \left|\mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}}\right| = \left|\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}^\perp}\right| = |(\mathbf{v}\bullet\mathbf{f}_3)\,\mathbf{f}_3 + (\mathbf{v}\bullet\mathbf{f}_4)\,\mathbf{f}_4| =$$

$$= \left|\frac{1}{7}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\2\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\2\end{pmatrix} + \frac{1}{35}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}4\\3\\-3\\1\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}4\\3\\-3\\1\end{pmatrix}\right| =$$

$$= \left|\frac{3}{7}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\2\end{pmatrix} + \frac{5}{35}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}4\\3\\-3\\1\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{7}\left|\begin{pmatrix}3\\-3\\3\\6\end{pmatrix} + \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}4\\3\\-3\\1\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{7}\left|\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}7\\0\\0\\7\end{pmatrix}\right| = \sqrt{2}.$$

4. Bestäm en bas i $N(F)$ genom att lösa $AX = \mathit{0}$ samt "L.K. = godt. vektorför att skriva $V(F)$ som lösningsrum. Vi får

$$\left(\begin{array}{ccc|cc}1&1&2&0&y_1\\1&0&1&0&y_2\\-1&-2&-3&0&y_3\end{array}\right) \underset{r_3+r_1}{\overset{r_2-r_1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|cc}1&1&2&0&y_1\\0&-1&-1&0&-y_1+y_2\\0&-1&-1&0&y_1+y_3\end{array}\right) \underset{-r_2}{\overset{r_3-r_2}{\sim}}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|cc}1&1&2&0&y_1\\0&1&1&0&y_1-y_2\\0&0&0&0&2y_1-y_2+y_3\end{array}\right) \overset{r_1-r_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&1&0&y_2\\0&1&1&0&y_1-y_2\\0&0&0&0&2y_1-y_2+y_3\end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow X = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t\\t\\-t\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \quad t\in\mathbb{R},\ N(F) = [(1,1,-1)]$$

$$V(F) = \left\{\mathbf{y}\in\mathbb{R}^3\colon 2y_1 - y_2 + y_3 = 0\right\}.$$

Ur detta ser vi att $N(F) \subset V(F)$ eftersom basen i $N(F)$ är ett element i $V(F)$ eftersom $2\cdot 1 - 1 - 1 = 0$, d.v.s. alla vektorer $t(1,1,-1)$, $t\in\mathbb{R}$. är gemensamma för $V(F)$ och $N(F)$.
För att bestämma baser i $N(F^2)$ och $V(F^2)$ bestämmer vi A^2.

$$A\cdot A = \begin{pmatrix}1&1&2\\1&0&1\\-1&-2&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&2\\1&0&1\\-1&-2&-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&-3&-3\\0&-1&-1\\0&5&5\end{pmatrix}$$

varur framgår att $V(F^2) = [(-3,-1,5)]$. För att bestämma $N(F^2)$ löser vi $A^2X = \mathit{0}$. Vi får

$$\left(\begin{array}{ccc|c}0&-3&-3&0\\0&-1&-1&0\\0&5&5&0\end{array}\right) \overset{\substack{r_1-3r_2\\r_3+5r_2\\-r_2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c}0&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$X = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}s\\-t\\t\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}, \qquad s,t\in\mathbb{R}$$

så $N(F^2) = [(1,0,0),(0,-1,1)]$.

5. Skriv Q på matrisform och beräkna egenvärdena och de egenvektorer som behövs.

$$Q = X^t A X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -4 & -5 \\ -4 & -2 & -4 \\ -5 & -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 7-\lambda & -4 & -5 \\ -4 & -2-\lambda & -4 \\ -5 & -4 & 7-\lambda \end{vmatrix} \overset{r_3 - r_1}{=} \begin{vmatrix} 7-\lambda & -4 & -5 \\ -4 & -2-\lambda & -4 \\ \lambda-12 & 0 & 12-\lambda \end{vmatrix} \overset{k_1+k_3}{=} \\ &= (12-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & -4 & -5 \\ -8 & -2-\lambda & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (12-\lambda) \begin{vmatrix} \lambda-2 & 4 \\ 8 & \lambda+2 \end{vmatrix} = \\ &= (12-\lambda)(\lambda^2 - 4 - 32) = (12-\lambda)(\lambda^2 - 36) = \\ &= (12-\lambda)(\lambda - 6)(\lambda + 6) = 0 \iff \lambda = \pm 6, 12. \end{aligned}$$

Enligt Sats 9.1.11, sid 227 gäller

$$\lambda_{\text{min}} |\mathbf{u}|^2 \le Q(\mathbf{u}) \le \lambda_{\text{max}} |\mathbf{u}|^2 \tag{2}$$

med likhet om $\mathbf{u}$ är en egenvektor till respektive egenvärde.

(a) I detta fall är $|\mathbf{u}|^2 = 2$, $\lambda_{\text{min}} = -6$ och $\lambda_{\text{max}} = 12$ så att

$$\max_{|\mathbf{u}|=\sqrt{2}} Q(\mathbf{u}) = 12 \cdot 2 = 24, \qquad \min_{|\mathbf{u}|=\sqrt{2}} Q(\mathbf{u}) = -6 \cdot 2 = -12$$

(b) I detta fall blir (2)

$$-6|\mathbf{u}|^2 \le Q(\mathbf{u}) = 3 \le 12|\mathbf{u}|^2.$$

Den vänstra olikheten ger i detta fall inget emedan den högra ger att

$$|\mathbf{u}|^2 \ge \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \iff |\mathbf{u}| \ge \frac{1}{2},$$

d.v.s. om $\mathbf{u}$ är ortsvektor för en punkt på ytan så ligger punkten på avstånd minst $\frac{1}{2}$ från origo. Enligt Sats 9.1.11 har vi likhet i den aktuella olikheten om $\mathbf{u}$ är en egenvektor med längd $\frac{1}{2}$ till egenvärdet 12.

$$\underline{\underline{\lambda = 12}}: \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & -4 & -5 & 0 \\ -4 & -14 & -4 & 0 \\ -5 & -4 & -5 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{r_3 - r_1 \\ 5r_2 - 4r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & -4 & -5 & 0 \\ 0 & 56 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_{12} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{R}.$$

Välj

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathbf{u} = \pm \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

d.v.s. de punkter som ligger närmast origo är $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{8}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{8}}\right)$. (Ytan är en en-mantlad hyperboloid.)

6. Bestäm egenvärden och egenvektorer till A.

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 9\text{-}\lambda & -10 \\ 5 & -6\text{-}\lambda \end{vmatrix}=(9-\lambda)(-6-\lambda)+50=\lambda^2-3\lambda-4=$$
$$=(\lambda-4)(\lambda+1)=0 \iff \lambda=4,\ -1$$

$$\underline{\underline{\lambda=4}}:\quad \left(\begin{array}{cc|c} 5 & -10 & 0 \\ 5 & -10 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_4=t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\lambda=-1}}:\quad \left(\begin{array}{cc|c} 10 & -10 & 0 \\ 5 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_{-1}=t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{f}_1=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \mathbf{f}_1=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \underline{\mathbf{f}}=\underline{\mathbf{e}}T=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\quad T^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_{\underline{\mathbf{f}}}=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\quad A_{\underline{\mathbf{f}}}^n=\begin{pmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix},$$

$$A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=TA_{\underline{\mathbf{f}}}^nT^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=TA_{\underline{\mathbf{f}}}^n\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\left(4^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}-(-1)^n\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)=4^n\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}-(-1)^n\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Detta ger att

$$a^{-n}A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\left(\frac{4}{a}\right)^n\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}-\left(\frac{-1}{a}\right)^n\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Om $0<a<4$ följer det att $\left(\frac{4}{a}\right)^n \to \infty$ då $n\to\infty$ och $a^{-n}A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ saknar därmed gränsvärde. Om $a>4$ följer det att $\left(\frac{4}{a}\right)^n$ och $\left(\frac{-1}{a}\right)^n \to 0$ då $n\to\infty$ och $a^{-n}A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. När $a=4$ fås att $\left(\frac{-1}{4}\right)^n \to 0$ då $n\to\infty$ och vi får

$$\lim_{n\to\infty} 4^{-n}A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{4}{4}\right)^n\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}-\left(\frac{-1}{4}\right)^n\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

d.v.s. gränsvärdet existerar endast om $a=4=$ största egenvärdet och gränsvärdet är då egenvektorn till det största egenvärdet.

7. (a) Om vi börjar med matrisen i ledningen så fås

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} a_{11}\text{-}\lambda & 0 & 1 \\ 0 & a_{22}\text{-}\lambda & 0 \\ 1 & 0 & a_{33}\text{-}\lambda \end{vmatrix}=(a_{11}\text{-}\lambda)(a_{22}\text{-}\lambda)(a_{33}\text{-}\lambda)-(a_{22}\text{-}\lambda)=$$
$$=-\lambda^3+(a_{11}+a_{22}+a_{33})\lambda^2-(a_{11}a_{22}+a_{11}a_{33}+a_{22}a_{33})\lambda+a_{11}a_{22}a_{33}-(a_{22}\text{-}\lambda),$$

d.v.s. koefficienten framför $\lambda^2=\mathrm{tr}(A)$. Ur detta ser vi också att den enda ***tillåtna produkt*** som ger en λ^2-term är produkten av diagonalelementen. Detta gäller även allmänt, den enda ***tillåtna produkt*** som ger en λ^2-term är produkten av diagonalelementen eftersom alla andra tillåtna produkter innehåller högst en faktor från diagonalen och det högsta gradtal vi då kan få från dem är 1. Därmed följer också påståendet i det allmänna fallet.

(b) För att visa att alla matriser till F har samma sekularpolynom använder vi basbytesformeln och produktlagen för determinanter, **Sats 4.8.1**, sid 96. Antag $A_{\underline{\mathbf{f}}} = T^{-1}A_{\underline{\mathbf{e}}}T$ och att $p(\lambda) = \det(A_{\underline{\mathbf{e}}} - \lambda I)$. Då fås

$$\begin{aligned}
\det(A_{\underline{\mathbf{f}}} - \lambda I) &= \det\left(T^{-1}A_{\underline{\mathbf{e}}}T - \lambda T^{-1}T\right) = \det\left(T^{-1}(A_{\underline{\mathbf{e}}} - \lambda I)\,T\right) = \\
&= \Big[\text{prod.lagen}\Big] = \det T^{-1} \cdot \det(A_{\underline{\mathbf{e}}} - \lambda I)\det T = \\
&= \det(A_{\underline{\mathbf{e}}} - \lambda I) \cdot \det\left(T^{-1} \cdot T\right) = \det(A_{\underline{\mathbf{e}}} - \lambda I) \cdot \det I = \\
&= \det(A_{\underline{\mathbf{e}}} - \lambda I) = p(\lambda).
\end{aligned}$$

Då polynomen $\det(A_{\underline{\mathbf{e}}} - \lambda I)$ och $\det(A_{\underline{\mathbf{f}}} - \lambda I)$ är samma polynom har de förstås samma koefficient framför λ^2 vilket enligt (a) är spåret av matrisen, dvs

$$\text{koefficienten framför } \lambda^2 = \operatorname{tr}(A_{\underline{\mathbf{e}}}) = \operatorname{tr}(A_{\underline{\mathbf{f}}}) \qquad \text{V.S.B.}$$

Anmärkning: $\operatorname{tr}(A_{\underline{\mathbf{e}}}) = \operatorname{tr}(A_{\underline{\mathbf{f}}})$ gäller för alla linjära avbildningar $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.