LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Ulf Janfalk

Utbildningskod: TATA31
Provkod: KTR1

Kontrollskrivning i Linjär algebra 2024–10–29, 8–12.

Inga hjälpmedel, förutom passare, linjal eller gradskiva. OBS! Inga formler eller liknande tryckta på linjal eller gradskiva. Ej räknedosa.
På uppgift 1–14 skall ***endast svar*** ges. Varje rätt svar ger 1 poäng, fel svar 0 poäng.
Flera svar får och bör ges på samma blad, helst i nummerordning.
Uppgift 15 och 16 ger tre poäng vardera; ***fullständiga och välmotiverade lösningar krävs.***
Minst 11 poäng tillgodoräknas som tre poäng på uppgift 1 på tentamen.
Minst 16 poäng ger ytterligare en bonuspoäng på tentamen.
Rätten att tillgodoräkna sig bonus består under läsåret 2024-2025.
Resultatet meddelas via e-post. Lösningar läggs ut efter skrivtidens slut på

http://courses.mai.liu.se/GU/TATA31/tentor.html

Om inget annat sägs, är alla koordinater för vektorer i planet och rummet givna relativt en högerorienterad ON-bas.

1. Ange lösningsmängden (kalla variablerna x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) till ekvationssystemet som ges av totalmatrisen
$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right).$$

2. Betrakta matriserna
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Beräkna den/de av de nedan angivna produkterna som är definierade:
$$AB, \qquad BA, \qquad B^tA.$$

3. Rita ett vanligt rätvinkligt koordinatsystem (höger ON) och låt **fem rutor** svara mot **en längdenhet**. Låt $\underline{\mathbf{e}}$ vara en ON-bas där $\mathbf{e}_1$ pekar i den horisontella koordinataxelns riktning och $\mathbf{e}_2$ i den lodräta axelns riktning. Rita i detta koordinatsystem in, så exakt som möjligt, vektorerna $\mathbf{u} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, den ortogonala projektionen av $\mathbf{u}$ på $\mathbf{v}$ och den ortogonala projektionen av $\mathbf{v}$ på $\mathbf{u}$.

4. Betrakta matriserna
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} b & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$
Bestäm, om möjligt, talen a, b så att $B = A^{-1}$.

5. Beräkna $\det(AB)$ då

$$A=\begin{pmatrix} 143 & 72 & 5\sqrt{72} \\ 2\mathrm{e} & \mathrm{e} & 3\mathrm{e} \\ 4\pi & 2\pi & 8\pi \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 43 & 138 \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt[5]{7} \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

6. Bestäm det X som löser matrisekvationen $\quad XA^{-1}+B^t=2I$ där

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

och I är enhetsmatrisen.

7. Låt $\quad \mathbf{u}_1=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{v}=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Skriv $\mathbf{v}$ som linjärkombination av $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$.

8. Ange på ***parameterform*** det plan Π genom origo som innehåller linjen

$$L\colon\ \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}+t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} \ln 2 \\ \pi \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad t\in\mathbb{R}.$$

9. Om vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vet vi att $|\mathbf{u}|=2$, $|\mathbf{v}|=3$ och vinkeln mellan dem är $\pi/3$. Bestäm $|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|$.

10. Ange en ***enhetsvektor*** som är ortogonal mot vektorerna

$$\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2+3\mathbf{e}_3 \quad \text{och} \quad \mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3$$

11. Låt L: $3x+4y=5$. Ange på ***parameterform*** den normal N till linjen L som går genom punkten $(1,2)$.

12. Låt L vara linjen genom $(-1,-2,4)$ med riktningsvektor $2\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3$. Bestäm den punkt på L som ligger närmast punkten $(2,-1,3)$.

13. Bestäm en ekvation på ***normalform*** till planet som innehåller punkterna $(1,2,3)$, $(1,0,-1)$ och $(-2,1,1)$.

14. Betrakta vektorerna $\mathbf{u}_1=(1,1,1,1)$, $\mathbf{u}_2=(1,0,1,0)$ och $\mathbf{u}_3=(1,1,1,3)$ samt underrummet

$$\mathbb{V}=[(1,2,2,2),(0,1,1,1),(0,0,0,1)]\subset\mathbb{R}^4.$$

Vilken/vilka av $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ tillhör $\mathbb{V}$.

(3 p) 15. Avgör för vilka värden på de reella talen a och b som ekvationssystemet

$$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ x+2y+bz=a \\ bx+y+z=2 \end{cases}$$

har entydig lösning, ingen lösning eller oändligt många lösningar.

(3 p) 16. Låt

$$\mathbb{U}=[(1,1,1,0),(1,0,1,2),(1,-1,1,4),(2,1,1,1)]\subset\mathbb{R}^4.$$

Beskriv $\mathbb{U}$ med så få som möjligt av de genererande vektorerna ovan. Vilken/vilka av vektorerna $\mathbf{v}=(2,3,2,-2)$ respektive $\mathbf{w}=(4,3,2,1)$ tillhör $\mathbb{U}$.

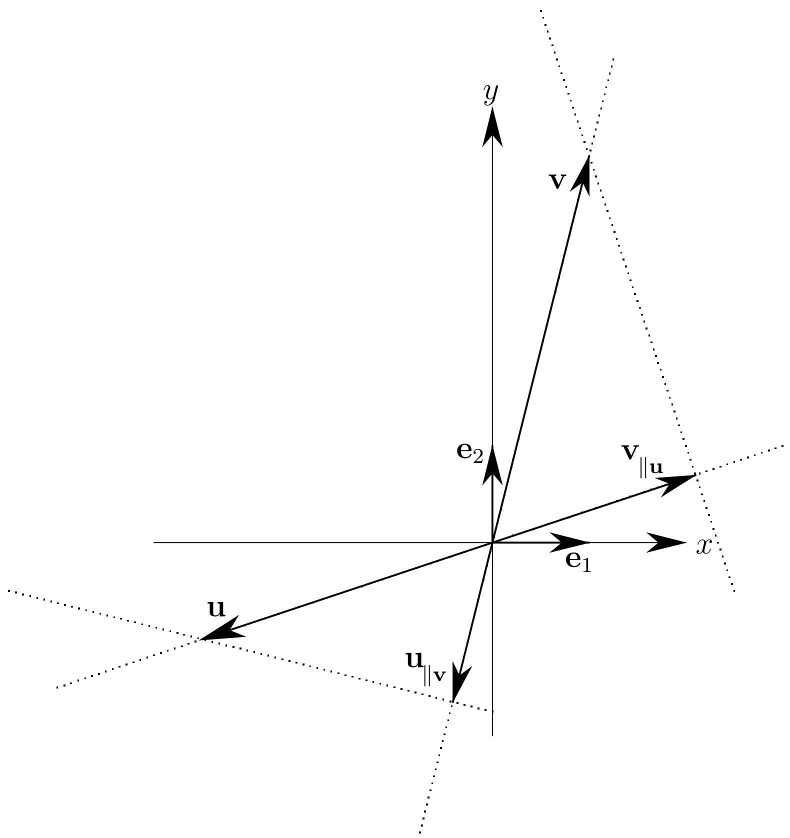
Lösningsförslag till TATA31. Linjär algebra, 2025–10–29

1. T.ex. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. Den enda som inte är definierad är BA.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ -5 & 1 & 10 \end{pmatrix},$$
$$B^t A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 2 & 2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

3.



4. $a = 3$, $b = 1$

5. $-2\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{5}e\pi$

6. $X = \begin{pmatrix} -24 & -34 \\ -24 & -36 \end{pmatrix}$

7. $\mathbf{v} = \dfrac{11}{3}\mathbf{u}_1 - \dfrac{5}{3}\mathbf{u}_2$

8. T.ex.

$$\Pi:\ \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} \ln 2 \\ \pi \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

9. $2{\cdot}3{\cdot}\sin\pi/3 = 3\sqrt{3}$

10. $\dfrac{1}{\sqrt{38}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

11. N: $\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$

12. $(1, 0, 3)$

13. $2y - z = 1$

14. $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3 \in \mathbb{U}$

15. Skriv på matrisform och lös ekvationen

"(determinanten av koefficientmatrisen A) = 0".

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & b & a \\ b & 1 & 1 & 2 \end{array}\right),$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & b \\ b & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{r_2 - r_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & b-3 \\ b & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3}(b-3)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ b & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -(b-3)(1-2b) = \frac{1}{2}(b-3)\left(b - \frac{1}{2}\right) = 0 \iff b = 3, \frac{1}{2}$$

$$\underline{\underline{b=3}}: \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & a \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2 - r_1 \\ r_3 - 3r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \\ 0 & -5 & -8 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{array}\right)$$

$$\underline{\underline{b=\frac{1}{2}}}: \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1/2 & a \\ 1/2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2a \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2 - 2r_1 \\ r_3 - r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 2a-2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2 - 5r_3 \\ r_2 \leftrightarrow r_3}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2a-17 \end{array}\right).$$

Detta ger

- entydig lösning för alla a då $b \neq 3$ och $b \neq \dfrac{1}{2}$ (determinantkriteriet),

- ingen lösning då $b = 3$ och $a \neq 1$ eller då $b = \dfrac{1}{2}$ och $a \neq \dfrac{17}{2}$,
- oändligt många lösningar då $b = 3$ och $a = 1$ eller då $b = \dfrac{1}{2}$ och $a = \dfrac{17}{2}$.

16. Kalla de genererande vektorerna i $\mathbb{U}$ för $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$. Ställ sedan upp beroendeekvationen samt L.K"$= \mathbf{v}, \mathbf{w}$, skriv om dem till matrisform och lös dem. Vi får

$$\lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \lambda_3\mathbf{u}_3 + \lambda_4\mathbf{u}_4 = \lambda_1\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda_2\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix} + \lambda_3\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\4\end{pmatrix} + \lambda_4\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\1\\1\\1\end{pmatrix} =$$

$$= \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4\\ \lambda_1 + 0\cdot\lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4\\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4\\ 0\cdot\lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 + 1\lambda_4\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1&1&1&2\\1&0&-1&1\\1&1&1&1\\0&2&4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\\\lambda_4\end{pmatrix} = \mathbf{0},\ \mathbf{v}, \mathbf{w}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc}1&1&1&2&0&2&4\\1&0&-1&1&0&3&3\\1&1&1&1&0&2&2\\0&2&4&1&0&-2&1\end{array}\right)\underset{\sim}{\substack{r_2-r_1\\r_3-r_1}}\left(\begin{array}{cccc|ccc}1&1&1&2&0&2&4\\0&-1&-2&-1&0&1&-1\\0&0&0&-1&0&0&-2\\0&2&4&1&0&-2&1\end{array}\right)\underset{\sim}{\substack{r_4+2r_2\\-r_2}}$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|ccc}1&1&1&2&0&2&4\\0&1&2&1&0&-1&1\\0&0&0&-1&0&0&-2\\0&0&0&-1&0&0&-1\end{array}\right)\underset{\sim}{\substack{r_4-r_3\\-r_3}}\left(\begin{array}{cccc|ccc}1&1&1&2&0&2&4\\0&1&2&1&0&-1&1\\0&0&0&1&0&0&2\\0&0&0&0&0&0&1\end{array}\right)$$

Vi börjar med beroendeekvationen. Skriver vi ut ovanstående som ekvationssystem fås

$$\begin{cases}\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 = 0\\ \lambda_2 + 2\lambda_3 + \lambda_4 = 0\\ \lambda_4 = 0\\ 0 = 0\end{cases} \iff \begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\\\lambda_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t\\-2t\\t\\0\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Då beroendeekvationen har fler lösningar än den triviala följer det att de genererande vektorerna $(1,1,1,0), (1,0,1,2), (1,-1,1,4), (2,1,1,1)$ är linjärt beroende. Insättning av lösningen för $t = 1$ i beroendeekvationen ger

$$\mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 + 0\cdot\mathbf{u}_4 = \mathbf{0} \iff \mathbf{u}_3 = -\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2,$$

d.v.s. $\mathbf{u}_3$ är en linjärkombination av de andra. Satsen om löjliga element, Sats 5.3.16, sid 111 ger då att

$$\mathbb{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cancel{\mathbf{u}_3}, \mathbf{u}_4] = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4] \subset \mathbb{R}^4.$$

Slutligen ser vi att ekvationssystemet som hör ihop med L.K$= \mathbf{v}$ är lösbart men att ekvationssystemet som hör ihop med L.K$= \mathbf{w}$ inte är det, d.v.s. $\mathbf{v} \in \mathbb{U}$ och $\mathbf{w} \notin \mathbb{U}$.