Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Ulf Janfalk

Utbildningskod: TATA31
Modul: TEN1

Tentamen i Linjär algebra (TATA31/TEN1) 2025–08–22, 14–19.

Inga hjälpmedel, förutom passare, linjal eller gradskiva. OBS! Inga formler eller liknande tryckta på linjal eller gradskiva. Ej räknedosa.
För godkänt räcker 9 poäng och minst 3 uppgifter med 2 eller 3 poäng. Godkänd kontrollskrivning ($\geq$ 11p) ht2024 ger 3 poäng på uppgift 1 (som alltså inte behöver lösas) och 16p eller mer ger 4 poäng på uppgift 1. Markera detta genom att skriva "G" respektive "G+1" i rutan för uppgift 1 på raden märkt "X här/*here*".
Fullständiga motiveringar krävs. Lösningar läggs ut måndag 25/8 på

http://courses.mai.liu.se/GU/TATA31/tentor.html

Resultat meddelas via e-post inom 15 arbetsdagar.
Alla koordinater för vektorer och punkter är, om ej annat anges, givna med avseende på ett positivt orienterat ON-system, $\mathbb{R}^n$ är ett euklidiskt rum med standardskalärprodukten och standardbasen ett positivt orienterat ON-system.

(2 p) 1. (a) Låt Π_1 och Π_2 vara två plan i rummet. Punkten $P_1 = (2, 0, 1) \in \Pi_1$ men inte Π_2 och $P_2 = (1, -1, 3) \in \Pi_2$ men inte Π_1. Vidare, skärningslinjen L mellan Π_1 och Π_2 ges av

$$L\colon\ \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Bestäm ekvationer på *normalform* till Π_1 och Π_2.

(1 p) (b) Låt $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Lös matrisekvationen $\quad AXA^{-1} = XA^{-1} - 2I.$

(3 p) 2. Betrakta ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ ax - y + z = 2 \\ 2x - ay = 1 \end{cases}.$$

För vilka värden på $a \in \mathbb{R}$ har ekvationssystemet entydig, ingen eller oändligt många lösningar. Om lösning saknas för något värde på a, bestäm minstakvadrat-lösningen till systemet för detta a-värde.

(2 p) 3. (a) Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Bestäm A^n, n =heltal.

(1 p) (b) Låt λ_{max} vara det största egenvärdet till matrisen A ovan. Bestäm

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\lambda_{max})^n} A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(Känns resultatet igen?)

(2 p) 4. (a) Den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ avbildar varje $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ på dess ortogonalprojektion i planet $2x+y+z=0$ följt av en sträckning faktorn 6. Bestäm F:s matris i standardbasen.

(1 p) (b) Ange F:s egenvärden och *egenrum*. (Räkna inte, tänk!)

(2 p) 5. (a) Betrakta underrummet

$$\mathbb{U} = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \colon \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_3 + x_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

Bestäm en ON-bas i $\mathbb{U}$ och fyll sedan ut den till en ON-bas i $\mathbb{R}^5$.

(1 p) (b) Låt $\mathbf{v} = (1, -1, 2, -1, 5)$. Använd resultatet ovan till att bestämma $\mathbf{v}_1 \in \mathbb{U}$ och $\mathbf{v}_2 \in \mathbb{U}^\perp$ så att $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$.

(2 p) 6. (a) Den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ har avbildningsmatrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

i standardbasen. Bestäm $N(F) \cap V(F)$ samt baser i $N(F)$ och $V(F)$.

(1 p) (b) Bestäm baser i $N(F^2)$ och $V(F^2)$.

(3 p) 7. Avbildningen $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ har avbildningsmatrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ i standardbaserna för $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^4$. Den så kallade *operatornormen* av F, $\|F\|$ definieras som

$$\|F\| = \max_{\substack{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2 \\ \mathbf{u} \neq \mathbf{0}}} \frac{|F(\mathbf{u})|}{|\mathbf{u}|}.$$

Bestäm $\|F\|$ samt ett $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ sådant att $|F(\mathbf{u})| = \|F\| \cdot |\mathbf{u}|$.

Lösningsförslag till TATA31, Linjär algebra, 2025–08–22.

1. (a) Kalla L:s riktningsvektor för $\mathbf{v}$ och sätt $P_0 = (1, 2, 3)$. Ur förutsättningarna följer att vektorerna $\mathbf{v}$ och $\overline{P_0P_1}$ ligger i Π_1, d.v.s. normalen $\mathbf{n}_1$ till $\Pi_1 \parallel \overline{P_0P_1} \times \mathbf{v}$. Detsamma gäller för Π_2, d.v.s. vektorerna $\mathbf{v}$ och $\overline{P_0P_2}$ ligger i Π_2, d.v.s. normalen $\mathbf{n}_2$ till $\Pi_2 \parallel \overline{P_0P_2} \times \mathbf{v}$. Detta ger

$$\overline{P_0P_1} = \overline{OP_1} - \overline{OP_0} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix} = -\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix},$$

$$\overline{P_0P_2} = \overline{OP_2} - \overline{OP_0} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\-3\\0\end{pmatrix} = -3\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$\begin{array}{lll} \mathbf{n}_1 \parallel \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix} & \times\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} & = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-6\\-4\\1\end{pmatrix} = -\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}6\\4\\-1\end{pmatrix}, \\ \qquad\quad -1 & \quad 1 & \\ \qquad\quad\ \ 2 & \ -1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \mathbf{n}_2 \parallel \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} & \times\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} & = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}, \\ \qquad\quad\ \ 0 & \quad 1 & \\ \qquad\quad\ \ 1 & \ -1 & \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Pi_1\colon 6x + 4y - z = D_1, \\ P_1 \in \Pi_1 \Longrightarrow 12 - 1 = 11 = D_1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \Pi_1\colon 6x + 4y - z = 11,$$

$$\left.\begin{array}{l} \Pi_2\colon 2x - z = D_2, \\ P_2 \in \Pi_2 \Longrightarrow 2 - 3 = -1 = D_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \Pi_1\colon 2x - z = -1.$$

(Kontrollera ditt svar genom att sätta in P_0 i båda ekvationerna.)

(b) Lös ut X ur ekvationen.

$$AXA^{-1} = XA^{-1} - 2I \overset{\substack{\text{mult med } A\\ \text{från höger}}}{\Longleftrightarrow} AX = X - 2A \iff$$

$$AX - X = (A - I)X = -2I \overset{\substack{\text{mult med } (A-I)^{-1}\\ \text{från vänster}}}{\Longleftrightarrow} X = -2(A - I)^{-1}A,$$

$$(A - I)^{-1} = \left(\begin{pmatrix}2 & 1\\3 & 5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right)^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 1\\3 & 4\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}4 & -1\\-3 & 1\end{pmatrix},$$

$$X = -2(A - I)^{-1}A = -2\begin{pmatrix}4 & -1\\-3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\3 & 5\end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix}5 & -1\\-3 & 2\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}-10 & 2\\6 & -4\end{pmatrix}.$$

2. Skriv på matrisform och beräkna determinanten av koefficientmatrisen.

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\a & -1 & 1\\2 & -a & 0\end{vmatrix} \overset{r_2 - r_1}{=} \begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\a-1 & -3 & 0\\2 & -a & 0\end{vmatrix} = -a(a-1) + 6 = 0 \iff a = 3, -2,$$

d.v.s. för $a \neq 3$ och $a \neq -2$ har systemet *entydig* lösning.
$a = 3$ ger

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2-3r_1 \\ r_3-2r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -2 & -1 \\ 0 & -7 & -2 & -1 \end{array}\right) \overset{r_3-r_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

d.v.s. systemet har oändligt många lösningar då $a = 3$.
$a = -2$ ger

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2+2r_1 \\ r_3-2r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \end{array}\right) \overset{3r_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & -6 & -6 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\overset{r_3+2r_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

Följaktligen saknar systemet lösning om $a = -2$. Återstår därmed att beräkna minsta-kvadratlösningen till systemet då $a = -2$. Vi får

$$A^t A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 8 & -1 \\ 8 & 9 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A^t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

vilket ger systemet

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 9 & 8 & -1 & -1 \\ 8 & 9 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \overset{\substack{r_1+9r_3 \\ r_2+8r_3 \\ r_1 \leftrightarrow 3_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 17 & 17 & 26 \\ 0 & 17 & 17 & 26 \end{array}\right) \overset{\substack{r_3-r_2 \\ r_2/17}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 26/17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{r_1-r_2}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 25/17 \\ 0 & 1 & 1 & 26/17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X = \begin{pmatrix} t - 25/17 \\ 26/17 - t \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} -25 \\ 26 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

3. (a) Undersök om A är diagonaliserbar genom att bestämma egenvärdena.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 8 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 16 \iff \lambda = 1 \pm 4 = 5, -3.$$

Då vi har två olika egenvärden till en 2×2-matris är A diagonaliserbar. Bestäm bas av egenvektorer. Vi får

$$\underline{\underline{\lambda = 5}}: \left(\begin{array}{cc|c} -4 & 8 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_5 = t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\underline{\underline{\lambda = -3}}: \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 8 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_{-3} = t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\mathbf{f}_1 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{f}_2 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ T^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Byter vi till denna fås

$$\begin{aligned}
A^n &= TA_{\underline{\mathbf{f}}}^n T^{-1} = T\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}^n T^{-1} = T\begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix}T^{-1} = \\
&= 5^n T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}T^{-1} + (-3)^n T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}T^{-1} = \\
&= \frac{5^n}{4}T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \frac{(-3)^n}{4}T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{5^n}{4}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{(-3)^n}{4}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{5^n}{4}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \frac{(-3)^n}{4}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(b) Med $\lambda_{max} = 5$ och A^n enligt ovan fås

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(\lambda_{max})^n}A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \frac{1}{5^n}\left(\frac{5^n}{4}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \frac{(-3)^n}{4}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{(-3)^n}{4\cdot 5^n}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{(-1)^n}{4}\left(\frac{3}{5}\right)^n\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \to \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

eftersom $(3/5)^n \to 0$ då $n \to \infty$. Notera att gränsvärdet är en egenvektor till λ_{max}, se Sats 9.7.1, sid 252.

4. (a) Då projektionsplanets normal är $\mathbf{n} = (2, 1, 1)$ och $|\mathbf{n}| = \sqrt{6}$ så följer det att

$$F(\mathbf{u}) = 6\left(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\|\mathbf{n}}\right) = 6\mathbf{u} - \frac{6}{|\mathbf{n}|^2}(\mathbf{u}\bullet\mathbf{n})\,\mathbf{n} = 6\mathbf{u} - \left(\mathbf{u}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Enligt Sats 7.3.1, sid 174 utgörs avbildningsmatrisens kolonner av det F gör med basvektorerna. Vi beräknar därför

$$\begin{aligned}
F(\mathbf{e}_1) &= \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \\
F(\mathbf{e}_2) &= \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} - \left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \\
F(\mathbf{e}_3) &= \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} - \left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \\
A &= \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -1 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(b) Då varje vektor parallell med **n** projiceras på **0** spelar ju den efterföljande sträckningen ingen roll, d.v.s. 0 är ett egenvärde och [**n**] dess egenrum.
Vidare, varje vektor **v** i planet $2x+y+z=0$ projiceras på sig själv för att sedan sträckas faktorn 6, d.v.s. $F(\mathbf{v})=6\mathbf{v}$. Följaktligen är 6 ett (dubbel)egenvärde och planet $2x+y+z=0$ dess egenrum. Dubbelegenvärde eftersom avbildningen är diagonaliserbar och egenrummet har dimension 2.

5. (a) Börja med att skriva ekvationssystemet som definierar $\mathbb{U}$ på matrisform och lös det.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{r_1-r_2 \\ r_1\leftrightarrow r_2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\mathbb{U} \ni \mathbf{u} = \underline{\mathbf{e}}X = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -2x_3-x_5=-4r-t \\ (3x_3-2x_4)/2=3r-s \\ 2r \\ s \\ t \end{pmatrix} =$$

$$= r\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad r, s, t \in \mathbb{R}.$$

Då parametervektorerna som hör ihop med s och t är ortogonala normerar vi dem och sätter dem som $\mathbf{f}_1$ respektive $\mathbf{f}_2$ för att sedan ortogonalisera $\mathbf{u}_r = (-4, 3, 2, 0, 0)$, d.v.s.

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_{r_{\|[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]}} = (\mathbf{u}_r\bullet\mathbf{f}_1)\,\mathbf{f}_1 + (\mathbf{u}_r\bullet\mathbf{f}_2)\,\mathbf{f}_2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\left(\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{3}{2}\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{4}{2}\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u}_{r_{\perp[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]}} = \mathbf{u}_r - \mathbf{u}_{r_{\|[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{66}}\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

och $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ är en ON-bas i $\mathbb{U}$.

För att fylla ut till ON-bas i $\mathbb{R}^5$ utnyttjar vi $\mathbb{U}^\perp$. Om vi ser de definierande ekvationerna som skalärprodukter som skall vara 0 följer det att $\mathbb{U}$ består av alla vektorer ortogonala mot normalerna" $\mathbf{n}_4 = (1, 2, -1, 2, 1)$ och $\mathbf{n}_5 = (1, 0, 2, 0, 1)$, d.v.s.

$$\mathbb{U}^\perp = [(1, 2, -1, 2, 1), (1, 0, 2, 0, 1)]$$

och då $\mathbf{n}_4 \perp \mathbf{n}_5$ räcker det med att normera dem för att vi skall ha fyllt ut till en ON-bas i $\mathbb{R}^5$. Följaktligen

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{66}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-4\\3\\4\\3\\-4\end{pmatrix} \in \mathbb{U},$$

$$\mathbf{f}_4 = \frac{1}{\sqrt{11}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\2\\1\end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_5 = \frac{1}{\sqrt{6}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{U}^\perp$$

är en ON-bas i $\mathbb{R}^5$.

(b) Då vi har ON-baser för både $\mathbb{U}$ och $\mathbb{U}^\perp$ kan vi beräkna både $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ som i Sats 6.3.9, sid 146. Då ON-basen i $\mathbb{U}^\perp$ bara har två basvektorer blir det en kortare kalkyl att beräkna $\mathbf{v}_2$ först. Vi får

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_{\|\mathbb{U}^\perp} = (\mathbf{v}\bullet\mathbf{f}_4)\,\mathbf{f}_4 + (\mathbf{v}\bullet\mathbf{f}_5)\,\mathbf{f}_5 =$$

$$= \frac{1}{11}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\-1\\5\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\2\\1\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\2\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{6}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\-1\\5\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\\1\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\\1\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{0}{11}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\2\\1\end{pmatrix} + \frac{10}{6}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{5}{3}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v} - \mathbf{v}_2 = \frac{1}{3}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\-3\\6\\-3\\15\end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}5\\0\\10\\0\\5\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-2\\-3\\-4\\-3\\10\end{pmatrix} \iff$$

$$\iff \mathbf{v} = \frac{1}{3}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-2\\-3\\-4\\-3\\10\end{pmatrix} + \frac{5}{3}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\\1\end{pmatrix} \quad \left(= \frac{1}{3}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\-3\\6\\-3\\15\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\-1\\5\end{pmatrix}\right).$$

6. (a) Vi börjar med nollrumsekvationen $AX = \mathit{0}$, tillika beroendeekvationen för $V(F)$. Vi tar också med "L.K. = godtycklig vektor" då vi behöver ekvation för $V(F)$ för att enkelt kunna beräkna $N(F) \cap V(F)$. Vi får

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -5 & 0 & y_1 \\ 2 & 1 & -4 & 0 & y_2 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & y_3 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2-2r_1 \\ r_3-r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -5 & 0 & y_1 \\ 0 & -3 & 6 & 0 & -2y_1+y_2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -y_1+y_3 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2-3r_3 \\ r_1+2r_3 \\ r_2 \leftrightarrow r_3}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -1 & 0 & -y_1+2y_3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -y_1+y_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_1+y_2-3y_3 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

varur följer att $(1, 2, 1)$ är en bas i $N(F)$. Tolkar vi ovanstående som lösning till beroendeekvationen för kolonnerna fås att

$$\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 = \mathbf{0} \iff \mathbf{k}_3 = -\mathbf{k}_1 - 2\mathbf{k}_2.$$

Ekvationen "L.K. = godtycklig vektor" tillsammans med Satsen om löjliga element (Sats 5.3.16, sid 111) ger då

$$V(F) = [\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3] = [\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2] = \left\{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3\colon y_1 + y_2 - 3y_3 = 0\right\}.$$

Geometriskt kan vi tolka $N(F)$ som en linje genom origo och $V(F)$ som ett plan genom origo. Insättning av basen i $N(F)$ i ekvationen för $V(F)$ ger $1+2-3\cdot 1 = 0$, d.v.s. $N(F) \subset V(F) \Longrightarrow N(F) \cap V(F) = N(F) = [(1, 2, 1)]$.

(b) Eftersom $N(F)$ och $V(F)$ har gemensamma element utöver $\mathbf{0}$ ger Sats 7.6.4, sid 187 att $N(F^2)$ och $V(F^2)$ blir annorlunda än $N(F)$ och $V(F)$. Då A^2 är avbildningsmatris till F börjar vi med att beräkna den.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Här ser vi direkt att $(-1, 1, 0)$ är en bas i $V(F^2)$ och löser vi $A^2X = \mathit{0}$ fås

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{r_2+r_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow X = \begin{pmatrix} s \\ 2t \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R},$$

d.v.s. $(1, 0, 0), (0, 2, 1)$ är en bas i $N(F^2)$.

7. Låt $\mathbf{u} = \underline{\mathbf{e}}_2 X = \underline{\mathbf{e}}_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Då standardbasen, $\underline{\mathbf{e}}_4$, i $\mathbb{R}^4$ är en ON-bas så fås

$$|F(\mathbf{u})|^2 = |\underline{\mathbf{e}}_4 AX|^2 = (\underline{\mathbf{e}}_4 AX) \bullet (\underline{\mathbf{e}}_4 AX) = (AX)^t AX = X^t A^t AX =$$

$$= X^t \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$$
$$= 7x_1^2 + 4x_1x_2 + 7x_2^2 = Q(\mathbf{u}),$$

d.v.s. $|F(\mathbf{u})|^2$ är en kvadratisk form med matris A^tA. Beräkna egenvärden och egenvektorer till det största egenvärdet.

$$\det(A^tA - \lambda I) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 2 \\ 2 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (7-\lambda)^2 - 2^2 = 0 \iff \lambda = 7 \pm 2 = 5, 9,$$
$$\underline{\underline{\lambda = 9}}: \quad \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_9 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Sats 9.1.11, sid 227 ger då att

$$Q(\mathbf{u}) = |F(\mathbf{u})|^2 \leq 9\,|\mathbf{u}|^2 \iff \frac{|F(\mathbf{u})|}{|\mathbf{u}|} \leq 3$$

med likhet om $\mathbf{u}$ är en egenvektor till 9. Detta ger då att

$$\|F\| = \max_{\substack{\mathbf{u}\in\mathbb{R}^2 \\ \mathbf{u}\neq\mathbf{0}}} \frac{|F(\mathbf{u})|}{|\mathbf{u}|} \leq 3.$$

Då vi har likhet i olikheten ovan för $\mathbf{u} = t(1,1)$, $t \neq 0$ följer det att $\|F\| = 3$ och att $|F(\mathbf{u})| = |F(1,1)| = \|F\| \cdot |\mathbf{u}| = 3\,|\mathbf{u}|$. För kontrollens skull utför vi beräkningarna.

$$|F(1,1)| = \left| \underline{\mathbf{e}}_4 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \underline{\mathbf{e}}_4 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} = \|F\| \cdot \left| \underline{\mathbf{e}}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|.$$