Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Ulf Janfalk

**Utbildningskod: TATA31**
**Modul: TEN1**

# Tentamen i Linjär algebra (TATA31/TEN1) 2025–01–13, 14–19.

**Inga hjälpmedel, förutom passare, linjal eller gradskiva. OBS! Inga formler eller liknande tryckta på linjal eller gradskiva. Ej räknedosa.**
För godkänt räcker 9 poäng och minst 3 uppgifter med 2 eller 3 poäng. Godkänd kontrollskrivning ($\geq$ 11p) ht2024 ger 3 poäng på uppgift 1 (som alltså inte behöver lösas) och 16p eller mer ger 4 poäng på uppgift 1. Markera detta genom att skriva ”G” respektive ”G+1” i rutan för uppgift 1 på raden märkt “X här/*here*”.
**Fullständiga motiveringar krävs.** Lösningar läggs ut tisdag 14/1 på

http://courses.mai.liu.se/GU/TATA31/tentor.html

Resultat meddelas via e-post inom 15 arbetsdagar.
**Alla koordinater för vektorer och punkter är, om ej annat anges, givna med avseende på ett positivt orienterat ON-system, $\mathbb{R}^n$ är ett euklidiskt rum med standardskalärprodukten och standardbasen ett positivt orienterat ON-system.**

1. Betrakta planet $\Pi$: $x + 2y + z = 4$ och punkterna $P_0 = (1, 1, 1)$, $P = (2, 1, -3)$.

(2 p) (a) Visa att $P_0 \in \Pi$, att $P \notin \Pi$ och ange den punkt $Q \in \Pi$ som ligger närmast $P$.

(1 p) (b) Bestäm arean av triangeln med hörn i $P_0$, $P$ och $Q$.

(1 p) 2. (a) Lös nedanstående system av differentialekvationer

$$\begin{cases} x_1' = 8x_1 - 6x_2 \\ x_2' = 9x_1 - 7x_2 \end{cases}, \qquad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = -1.$$

(2 p) (b) Skriv din lösning på matrisform, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Beräkna sedan $X(0)$, derivatan $X'$ samt $AX$ där $A$ är den matris du troligtvis använt för att lösa uppgift (a) och bevisa med hjälp av detta att din lösning är korrekt.

(3 p) 3. Den linjära avbildningen $F_a\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $a \in \mathbb{R}$ definieras som

$$F_a(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_1 + ax_2 + x_3 - 3x_4, ax_1 + 2x_2 + 5x_3, x_1 + x_3 + 2x_4, -x_2 - 2x_3 + x_4).$$

Bestäm alla $a$ för vilka nollrummet till $F_a$ får positiv dimension, d.v.s. $\dim N(F_a) \geq 1$. För det eller de $a$-värden du får, ange en bas i $N(F_a)$ och en bas i $V(F_a)$ samt deras dimension.

4. Betrakta underrummet

$$\mathbb{U} = [7 - x + 3x^2, -14 + x - 5x^2 + x^3, 7 - 2x + 4x^2 + x^3, 7 - 3x + 5x^2 + 2x^3] \subset \mathbb{P}_3.$$

(2 p) (a) Bestäm en bas i $\mathbb{U}$ och fyll sedan ut den bas du valt till en bas i $\mathbb{P}_3$. (Dina basvektorer skall vara utskrivna som de polynom de är.)

(1 p) (b) Bestäm koordinaterna för polynomet $\mathbf{q}(x) = x^2$ i den bas du valt.

5. Låt $\mathbb{U} = [(1,2,1,1), (-1,1,-1,2)] \subset \mathbb{R}^4$ och $\mathbf{v} = (1,2,3,1)$.

(2 p) (a) Använd minstakvadrat-metoden till att bestämma ortogonalprojektionen, $\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}}$, av $\mathbf{v}$ på $\mathbb{U}$.

(1 p) (b) Bestäm avståndet mellan $\mathbb{U}$ och $\mathbf{v}$.

(3 p) 6. Vilken sorts kurva definieras av ekvationen

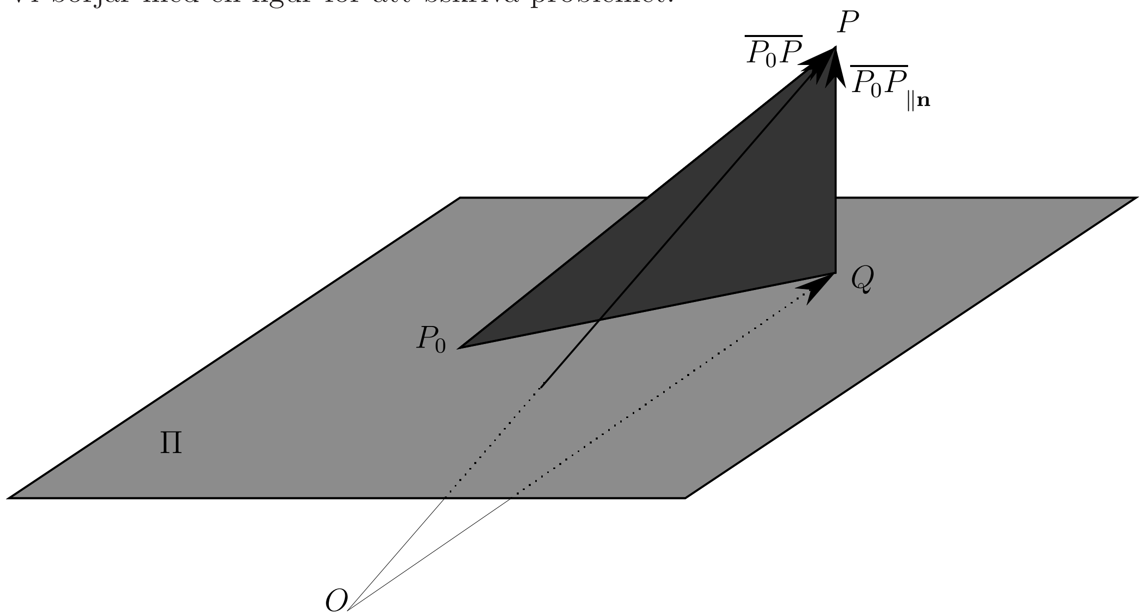
$$5x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2 + 8\sqrt{2}x_1 - 8\sqrt{2}x_2 = 0?$$

Rita kurvan så noggrant som möjligt, först i ett lämpligt koordinatsystem som du själv väljer och därefter i $x_1x_2$-systemet. Ange speciellt medelpunkt och symmetriaxlar i $x_1x_2$-systemet samt halvaxellängderna.

(3 p) 7. Låt $P$ vara en nollskild $3\times1$-matris och definiera matrisen $A = I - \dfrac{2}{P^tP}PP^t$ där $I =$ enhetsmatrisen. Låt $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildning som har matrisen $A$ ovan som avbildningsmatris i standardbasen. Visa att $F$ är en spegling.

# Lösningsförslag till TATA31, Linjär algebra, 2025–01–13.

1. Vi börjar med en figur för att bskriva problemet.




(a) Insättning av koordinaterna för $P_0$ respektive $P$ i ekvationen för $\Pi$ ger

$$\begin{aligned} P_0:&\ \ 1+2+1=4 \Longrightarrow P_0 \in \Pi,\\ P:&\ \ 2+2\cdot 1-3=1 \Longrightarrow P \notin \Pi. \end{aligned}$$

Med ledning av ovanstående figur börjar vi med att beräkna $\overline{P_0P}$ och $\overline{P_0P}_{\|\mathbf{n}}$.

$$\overline{P_0P} = \overline{0P} - \overline{\overline{OP_0}} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\-4\end{pmatrix},$$

$$\overline{P_0P}_{\|\mathbf{n}} = \frac{\overline{P_0P}\bullet\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n} = \frac{1}{6}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\-4\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},$$

$$\overline{OQ} = \overline{OP} - \overline{P_0P}_{\|\mathbf{n}} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}4\\2\\-6\end{pmatrix} + \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}5\\4\\-5\end{pmatrix}$$

(b) Arean av triangeln kan beräknas, t.ex. genom

$$\frac{1}{2}\left|\overline{P_0P} \times \overline{P_0P}_{\|\mathbf{n}}\right| == \frac{1}{2}\left|\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\-4\end{pmatrix} \times \frac{1}{2}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{4}\left|\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}8\\-5\\2\end{pmatrix}\right| = \frac{\sqrt{93}}{4}.$$

$$\begin{matrix}1 & & 1\\ 0 & & 2\end{matrix}$$

Då triangeln är rätvinklig kan man även beräkna arean som $\frac{1}{2}\left|\overline{P_0Q}\right| \cdot \left|\overline{P_0P}_{\|\mathbf{n}}\right|$.

2. (a) Skriv ekvationen på matrisform och beräkna egenvärden och egenvektorer. Vi får

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = X' = \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ 9 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = AX,$$

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 8-\lambda & -6 \\ 9 & -7-\lambda \end{vmatrix} = (8-\lambda)(-\lambda-7)+54 = \lambda^2-\lambda-2 =$$

$$= (\lambda-2)(\lambda+1) = 0 \iff \lambda = 2, -1,$$

$$\underline{\underline{\lambda=2}}: \left(\begin{array}{cc|c} 6 & -6 & 0 \\ 9 & -9 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow X_2 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\underline{\underline{\lambda=-1}}: \left(\begin{array}{cc|c} 9 & -6 & 0 \\ 9 & -6 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow X_{-1} = t\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

I basen av egenvektorer kan lösningen skrivas

$$\mathbf{f}_1 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{f}_2 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{e}}T = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$X = C_1 e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$X(0) = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow X = 5e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2e^{-t}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(b) Matrisformen av lösningen finns på raden ovanför. Vi får

$$X(0) = 5e^{2\cdot 0}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2e^{-0}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{OK.},$$

$$X' = 2\cdot 5e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - (-1)\cdot 2e^{-t}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{10e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2e^{-t}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}}},$$

$$AX = \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ 9 & -7 \end{pmatrix}\left(5e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2e^{-t}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= 5e^{2t}\begin{pmatrix} 8 & -6 \\ 9 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2e^{-t}\begin{pmatrix} 8 & -6 \\ 9 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

$$= 5e^{2t}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} - 2e^{-t}\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{10e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2e^{-t}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}}} = X' \quad \text{VSB}$$

3. Skriv uttrycket för $F_a$ på "bas · koordinatform".

$$F_a(\mathbf{x}) = (-x_1 + ax_2 + x_3 - 3x_4, ax_1 + 2x_2 + 5x_3, x_1 + x_3 + 2x_4, -x_2 - 2x_3 + x_4) =$$

$$= \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -x_1 + ax_2 + x_3 - 3x_4 \\ ax_1 + 2x_2 + 5x_3 \\ x_1 + x_3 + 2x_4 \\ -x_2 - 2x_3 + x_4 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -1 & a & 1 & -3 \\ a & 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\, A_a X.$$

Enligt Sats 4.7.1, sid 92 är $\dim N(F_a) \geq 1 \iff \det A_a = 0$. Vi får

$$\det A_a = \begin{vmatrix} -1 & a & 1 & -3 \\ a & 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{k_2+k_4 \\ k_3+2k_4}}{=} \begin{vmatrix} -1 & a-3 & -5 & -3 \\ a & 2 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & a-3 & -5 \\ a & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} \overset{r_2-r_3}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & a-3 & -5 \\ a-1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 5(a-1)(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a-3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5(a-1)(a-3+2) =$$

$$= -5(a-1)^2 = 0 \iff a = 1$$

Sätt in $a = 1$ och lös nollrumsekvationen $A_{a=1}X = \mathit{0}$. Vi får

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2+r_1 \\ r_3+r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{-r_1+r_3 \\ r_2-3r_3 \\ r_4+r_3 \\ r_3 \leftrightarrow r_2}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s - 2t \\ 2s + t - s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}$$

d.v.s. $(1, 2, -1, 0), (-2, 1, 0, 1)$ är en bas i $N(F_1)$ vilket ger $\dim N(F_1) = 2$.
Enligt Dimensionssatsen, Sats 7.5.6, sid 182 är

$$\dim V(F_1) = \dim \mathbb{R}^4 - \dim N(F_1) = 4 - 2 = 2.$$

Då $V(F_1) =$ "höljet av $A_1$:s kolonner" kan vi ta vilka två som helst av $A_1$:s kolonnvektorer som bas, t.ex. $(-1, 1, 1, 1, 0)$ och $(1, 2, 0, -1)$. Eftersom dessa ej är parallella är de linjärt oberoende och "rätt antal", d.v.s. en bas i $V(F_1)$.

4. (a) Börja med att skriva polynomen på "bas·koordinatform" där vi låter $\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{pmatrix}$ beteckna standardbasen i $\mathbb{P}_3$.

$$\mathbf{p}_1 = 7 - x + 3x^2 = \underline{\mathbf{x}} \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{p}_2 = -14 + x - 5x^2 + x^3 = \underline{\mathbf{x}} \begin{pmatrix} -14 \\ 1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{p}_3 = 7 - 2x + 4x^2 + x^3 = \underline{\mathbf{x}} \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{p}_4 = 7 - 3x + 5x^2 + 2x^{=} \underline{\mathbf{x}} \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Därefter studerar vi beroendeekvationen och "LK=godtyckligt polynom"

$$\lambda_1\mathbf{p}_1+\lambda_2\mathbf{p}_2+\lambda_3\mathbf{p}_3+\lambda_4\mathbf{p}_4=\mathbf{0},\quad a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3.$$

Vi får

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} 7 & -14 & 7 & 7 & 0 & a_0\\ -1 & 1 & -2 & -3 & 0 & a_1\\ 3 & -5 & 4 & 5 & 0 & a_2\\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & a_3 \end{array}\right) \underset{\substack{r_1+7r_2\\ r_3+3r_2\\ -r_2\leftrightarrow r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & -1 & 2 & 3 & 0 & -a_1\\ 0 & -7 & -7 & -14 & 0 & a_0+7a_1\\ 0 & -2 & -2 & -4 & 0 & 3a_1+a_2\\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & a_3 \end{array}\right) \underset{\substack{r_2+7r_4\\ r_3+2r_4\\ r_4\leftrightarrow r_2}}{\sim}$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 3 & 5 & 0 & -a_1+a_3\\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & a_3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0+7a_1+7a_3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3a_1+a_2+2a_3 \end{array}\right)\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\\ \lambda_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3s+5t\\ s+2t\\ -s\\ -t\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}3\\ 1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}5\\ 2\\ 0\\ -1\end{pmatrix},\qquad s,t\in\mathbb{R}.$$

Insättning av lösningen i beroendeekvationen ger

$$\underline{\underline{s=1,t=0}}:3\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_3+0\cdot\mathbf{p}_4=\mathbf{0}\iff\mathbf{p}_3=3\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2$$
$$\underline{\underline{s=0,t=1}}:5\mathbf{p}_1+2\mathbf{p}_2+0\cdot\mathbf{p}_3-\mathbf{p}_4=\mathbf{0}\iff\mathbf{p}_4=5\mathbf{p}_1+2\mathbf{p}_2$$

vilket ger att vi kan utse $\mathbf{p}_3$ och $\mathbf{p}_4$ till löjliga element. Satsen om löjliga element, Sats 5.3.16, sid 111 ger då att

$$\mathbb{U}=[\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_3,\mathbf{p}_4]=[\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2]$$

och $\mathbf{p}_1=7-x+3x^2,\ \mathbf{p}_2=-14+x-5x^2+x^3$ är en bas i $\mathbb{U}$.
För att enkelt hitta utfyllnaden skriver vi $\mathbb{U}$ som ett lösningsrum.
Ur "LK=godtyckligt polynom" ser vi att den är lösbar omm

$$\begin{cases} a_0+7a_1+\phantom{a_2+{}}7a_3=0\\ \phantom{a_0+{}}3a_1+a_2+2a_3=0\end{cases}\Longrightarrow\mathbb{U}=\left\{\mathbf{q}\in\mathbb{P}_3:\ \begin{array}{l} a_0+7a_1+7a_3=0\\ 3a_1+a_2+2a_3=0\end{array}\right\}.$$

För att välja utfyllnadspolynomen utnyttjar vi Plussatsen, Sats 5.4.21, sid 123. Välj det första utfyllnadspolynomet så att det bryter mot en av ekvationerna men uppfyller den andra. Tittar vi mot (b)-uppgiften inser man att välja, t.ex. $\mathbf{p}_5=x^2$ ($a_2=1$, övriga $=0$) som bryter mot $3a_1+a_2+2a_3=0$ men uppfyller $a_0+7a_1+7a_3=0$ blir ett smart val. Detta innebär att $\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_5$ är linjärt oberoende enligt Plussatsen och att

$$[\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_5]=\{\mathbf{q}\in\mathbb{P}_3\colon a_0+7a_1+7a_3=0\}.$$

Därefter väljer vi $\mathbf{p}_6$ som bryter mot $a_0+7a_1+7a_3=0$, t.ex. $\mathbf{p}_6=x$. Enligt Plussatsen gäller då att $\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_5,\mathbf{p}_6$ är linjärt oberoende. Vidare så är de "rätt antal" och enligt Satsen om rätt antal element, Sats 5.3.16, sid 111 är

$$\mathbf{p}_1=7-x+3x^2,\ \mathbf{p}_2=-14+x-5x^2+x^3,\mathbf{p}_5=x^2,\mathbf{p}_6=x$$

en bas i $\mathbb{P}_3$.

(b) Med den bas som valdes i (a)-uppgiften ser vi att

$$\mathbf{q} = x^2 = \mathbf{p}_5 = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_5 & \mathbf{p}_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

d.v.s. $\mathbf{q} = x^2$ har koordinaterna $0, 0, 1, 0$ i den valda basen.

5. (a) Studera ekvationen

$$\lambda_1 \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\, AX = \underline{\mathbf{e}}\, Y = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{v}.$$

Ur Sats 6.4, sid 158 följer det att $\underline{\mathbf{e}}\, A$(minstakvadrat-lösningen till $AX = Y$ ) ger $\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}}$. Vi får

$$A^t A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix},$$

$$A^t Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix} = 9 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$A^t AX = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} X = 9 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \iff$$

$$\iff X = 9 \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{9}{45} \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} = \frac{1}{5} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{3}{5} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Det sökta avståndet fås ur Sats 6.3.15, sid 150 som

$$\min_{\mathbf{u} \in \mathbb{U}} |\mathbf{v} - \mathbf{u}| = \left| \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} \right| = \frac{1}{5} \left| \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{5} \left| \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \frac{2}{5} \left| \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right| =$$

$$= \frac{2}{5} \sqrt{15}.$$

6. Skriv på matrisform. Vi får

$$5x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2 + 8\sqrt{2}x_1 - 8\sqrt{2}x_2 = X_{\underline{\mathbf{e}}}{}^t \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} X_{\underline{\mathbf{e}}} + 8\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Beräkna egenvärden och egenvektorer till matrisen.

$$\begin{vmatrix} 5\text{-}\lambda & \text{-}3 \\ \text{-}3 & 5\text{-}\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)^2 - 3^2 = 0 \iff \lambda = 5 \pm 3 = 2, 8,$$

$$\underline{\underline{\lambda = 2}}: \left(\begin{array}{cc|c} 3 & \text{-}3 & 0 \\ \text{-}3 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \text{-}1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_2 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

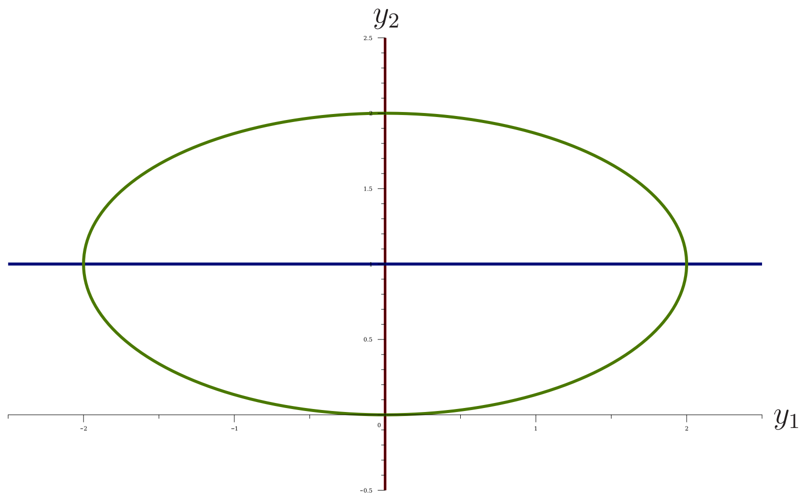
$$\underline{\underline{\lambda = 8}}: \left(\begin{array}{cc|c} \text{-}3 & \text{-}3 & 0 \\ \text{-}3 & \text{-}3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_8 = t\begin{pmatrix} \text{-}1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} \text{-}1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{e}}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & \text{-}1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Då egenvärdena är positiva är kurvan en ellips. Byt till ON-basen av egenvektorer. Vad som hgänder med den kvadratiska biten vet från teorin. Förstagrads-termerna hanterar vi genom koordinatsambandet, $X_{\underline{\mathbf{e}}} = TX_{\underline{\mathbf{f}}}$ som insatt i uttrycket ger

$$\begin{aligned} &X_{\underline{\mathbf{e}}}{}^t\begin{pmatrix} 5 & \text{-}3 \\ \text{-}3 & 5 \end{pmatrix}X_{\underline{\mathbf{e}}} + 8\sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 & \text{-}1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \\ &= X_{\underline{\mathbf{f}}}{}^t\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}X_{\underline{\mathbf{f}}} + 8\sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 & \text{-}1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & \text{-}1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \\ &= 2y_1^2 + 8y_2^2 + 8\begin{pmatrix} 0 & \text{-}2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 2y_1^2 + 8y_2^2 - 16y_2 \\ &= 2y_1^2 + 8\left(y_2^2 - 2y_2\right) = 2y_1^2 + 8\left((y_2 - 1)^2 - 1\right) = 0 \iff \\ &\iff 2y_1^2 + 8(y_2 - 1)^2 = 8 \iff \frac{y_1^2}{4} + (y_2 - 1)^2 = \left(\frac{y_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_2 - 1}{1}\right)^2 = 1. \end{aligned}$$

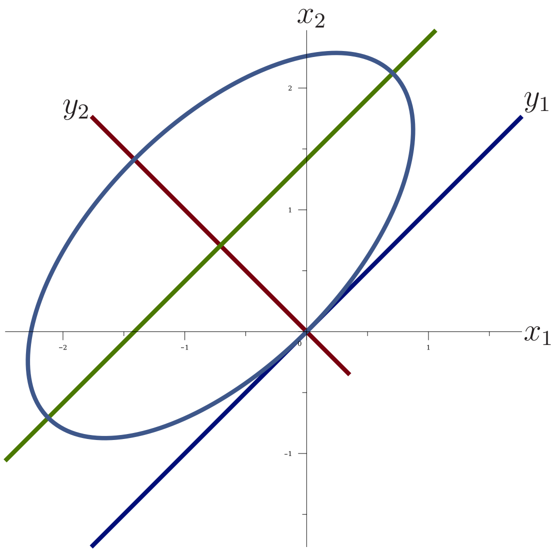
Ur detta ser vi att vi har en ellips med medelpunkt $M = (0, 1)$ i koordinatsystemet som ges av basen av egenvektorer, storaxel = ena symmetriaxeln parallell med $\mathbf{f}_1$ och halvaxellängd 2, lillaxel=andra symmetriaxeln parallell med $\mathbf{f}_2$ och halvaxellängd 1. Ritar vi den i koordinatsystemet definierat av basen av egenvektorer får vi följande figur.




Då vi byter från ON-bas till ON-bas och då basvektorerna är valda så att $\det T = 1$ är det nya $y_1y_2$-systemet en vridning av det gamla, här $45^\circ$ moturs. Det enda som återstår blir därför att beräkna medelpunktens koordinater i det ursprungliga systemet. Dessa fås som

$$\overline{OM} = \underline{\mathbf{f}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

och vi får följande figur.




7. Påståendet kan bevisas på en mängd olika sätt. Om man, t.ex. skriver som vi gör i kap2 av kursen när vi räknar ut en spegling i ett plan med normal $\mathbf{n}$ så har vi

$$F(\mathbf{u}) = \mathbf{u} - 2\mathbf{u}_{\|\mathbf{n}} = \mathbf{u} - 2\frac{\mathbf{u}\bullet\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n}$$

vilket onekligen påminner om den givna matrisen. En rimlig gissning är därför att $\mathbf{n} = \underline{\mathbf{e}}\, P$. Notera att i så fall är $P^tP = \underline{\mathbf{e}}\, P\bullet\underline{\mathbf{e}}\, P = \mathbf{n}\bullet\mathbf{n} = |\mathbf{n}|^2$. För att visa att det är en vanlig spegling kan vi beräkna $F(\mathbf{n})$ och $F(\mathbf{v})$ för en vektor

$$\mathbf{v} \perp \mathbf{n} \iff 0 = \mathbf{n}\bullet\mathbf{v} = \underline{\mathbf{e}}\, P\bullet\underline{\mathbf{e}}\, X = P^tX$$

och visa att vi får det förväntade resultatet. OBS! Kom ihåg att $P^tP$ är ett tal.

$$F(\mathbf{n}) = \underline{\mathbf{e}}\left(I - \frac{2}{P^tP}PP^t\right)P = \underline{\mathbf{e}}\, P - \frac{2}{P^tP}\underline{\mathbf{e}}\, P(P^tP) = \mathbf{n} - 2\,\underline{\mathbf{e}}\, P = \mathbf{n} - 2\mathbf{n} = -\mathbf{n},$$
$$F(\mathbf{v}) = \underline{\mathbf{e}}\left(I - \frac{2}{P^tP}PP^t\right)X = \underline{\mathbf{e}}\, X - \frac{2}{P^tP}\underline{\mathbf{e}}\, P\underbrace{P^tX}_{=0} = \underline{\mathbf{e}}\, X = \mathbf{v},$$

d.v.s. $F$ har de för en spegling unika egenskaperna. Följaktligen är $F$ en spegling i planet med normal $\mathbf{n} = \underline{\mathbf{e}}\, P$.