

Tentamen i Linjär algebra (TATA31/TEN1) 2026–01–17, 14–19.

Inga hjälpmedel, förutom passare, linjal eller gradskiva. OBS! Inga formler eller liknande tryckta på linjal eller gradskiva. Ej räknedosa.

För godkänt räcker 9 poäng och minst 3 uppgifter med 2 eller 3 poäng. Godkänd kontrollskrivning (≥ 11 p) ht2025 ger 3 poäng på uppgift 1 (som alltså inte behöver lösas) och 16p eller mer ger 4 poäng på uppgift 1. Markera detta genom att skriva "G" respektive "G+1" i rutan för uppgift 1 på raden märkt "X här/here".

Fullständiga motiveringar krävs. Lösningar läggs ut måndag 19/1 på

<http://courses.mai.liu.se/GU/TATA31/tentor.html>

Resultat meddelas via e-post inom 15 arbetsdagar.

Alla koordinater för vektorer och punkter är, om ej annat anges, givna med avseende på ett positivt orienterat ON-system, \mathbb{R}^n är ett euklidiskt rum med standardskalärprodukten och standardbasen ett positivt orienterat ON-system.

- (2 p) 1. (a) Ange en ekvation, på normalform, för planet Π som innehåller punkterna $(1, 2, 0)$ och $(-1, 1, 3)$ samt är parallellt med linjen (\underline{e} = standardbasen i \mathbb{R}^3)

$$L: \underline{e} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underline{e} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \underline{e} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

- (1 p) (b) Ange inversen till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

(kalkylen behöver inte redovisas) samt verifiera i enlighet med definitionen av matrisinvers att ditt svar är korrekt.

2. Den linjära avbildningen $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ har matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2a & b & c \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -c & -a \end{pmatrix}$$

i standardbasen.

- (2 p) (a) Bestäm, om möjligt, de reella talen a, b, c så att vektorerna $(1, 1, 2)$ och $(-1, 1, 1)$ blir egenvektorer till F samt ange deras egenvärden.
- (1 p) (b) Den tredje egenvektorn är $(1, 0, 1)$. Vad har den för egenvärde?

3. Den linjära avbildningen $F: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definieras av

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4, -x_1 - 2x_2 - x_4, 2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4).$$

(2 p) (a) Bestäm en bas i nollrummet respektive en bas i värderummet samt ange deras respektive dimension.

(1 p) (b) Beräkna $F(1, 2, 3, 4)$. Bestäm därefter alla $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^4$ sådana att $F(\mathbf{u}) = F(1, 2, 3, 4)$.

4. Betrakta underrummet

$$\mathbb{U} = [(1, 0, 2, 0, 1), (0, 1, 0, 2, 0), (1, 2, 3, 4, 5)] \subset \mathbb{R}^5.$$

(2 p) (a) Bestäm en ON-bas i \mathbb{U} och fyll ut den till en ON-bas i \mathbb{R}^5 .

(1 p) (b) Låt $\mathbf{v} = (4, -2, -1, 1, 1) \in \mathbb{R}^5$. Bestäm avståndet mellan \mathbf{v} och \mathbb{U} samt mellan \mathbf{v} och \mathbb{U}^\perp .

(3 p) 5. Betrakta underrummet

$$\mathbb{U} = [1 - 2x + x^4, -2x + x^2 + x^3 + x^4, -4 + x + x^2 + x^4, 4 - 5x + x^2 + 2x^3 + x^4] \subset \mathbb{P}_4.$$

Bestäm en bas i \mathbb{U} och fyll ut den till en bas i \mathbb{P}_4 . Bestäm koordinaterna för $\mathbf{q} = x$ i den bas du valt

(3 p) 6. Betrakta den kvadratiska formen Q och kurvorna Γ_1, Γ_2 definierade genom

$$\begin{aligned} Q(x_1, x_2) &= -x_1^2 + 16x_1x_2 + 11x_2^2, \\ \Gamma_1: Q(x_1, x_2) &= -x_1^2 + 16x_1x_2 + 11x_2^2 = 15, \\ \Gamma_2: Q(x_1, x_2) &= -x_1^2 + 16x_1x_2 + 11x_2^2 = -15. \end{aligned}$$

Skissa kurvorna och ange vilken kurvtyp Γ_1 respektive Γ_2 är? Vilka punkter på Γ_1 respektive Γ_2 ligger närmast origo och på vilket avstånd ligger de?

(3 p) 7. De linjära avbildningarna $F, G: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ har i standardbasen matriserna

$$A_F = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{respektive} \quad A_G = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Både F och G är vridningar (behöver ej visas). Vad kan sägas om den sammansatta avbildningen $F \circ G$? Ge en fullständig beskrivning av vad $F \circ G$ har för verkan på vektorerna i \mathbb{R}^3 .

Lösningförslag till TATA31, Linjär algebra, 2026-01-17.

1. (a) Sätt $P_1 = (1, 2, 0)$, $P_2 = (-1, 1, 3)$ och $L: \mathbf{x} = \overline{OP_0} + t\mathbf{v}$, $t \in \mathbb{R}$ där $P_0 = (3, -1, 4)$ och $\mathbf{v} = (0, 2, -1)$. Från förutsättningarna inses att Π :s normal $\mathbf{n} \parallel \mathbf{v} \times \overline{P_1P_2}$. Detta ger

$$\begin{aligned} \overline{P_1P_2} &= \overline{OP_2} - \overline{OP_1} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{v} \times \overline{P_1P_2} \underline{\mathbf{e}} &\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \times \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \implies \\ &\implies \Pi: 5x + 2y + 4z = D, \\ P_1 \in \Pi: &5 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 0 = 9 = D, \\ P_2 \in \Pi: &5 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 = 9 \quad \blacksquare, \end{aligned}$$

d.v.s. det sökta planets ekvation är $5x + 2y + 4z = 9$.

- (b) Beräkning på något sätt ger

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \\ A^{-1} \cdot A &= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} = I, \\ A \cdot A^{-1} &= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} = I. \end{aligned}$$

Anmärkning: Egentligen skall man beräkna både $A \cdot A^{-1}$ och $A^{-1} \cdot A$ för att göra det "i enlighet med definitionen" men då det är ett välkänt faktum att "gäller en gäller båda" är detta inget jag drar poäng för.

2. (a) Sätt $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 2)$, $\mathbf{u}_2 = (-1, 1, 1)$ och skriv F på matrisform, $F(\mathbf{u}) = F(\underline{\mathbf{e}}X) = \underline{\mathbf{e}}AX$. Då fås

$$F(\mathbf{u}_1) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2a & b & c \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -c & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2a + b + 2c \\ 1 \\ 1 - 2a - c \end{pmatrix} = \lambda_1 \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$F(\mathbf{u}_2) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2a & b & c \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -c & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -2a + b + c \\ 2 \\ -1 - a - c \end{pmatrix} = \lambda_2 \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Ur (1) följer direkt att $\lambda_1 = 1$ och ur (2) att $\lambda_2 = 2$. Slår vi ihop (1) och (2) får vi

$$\begin{cases} 2a + b + 2c = 1 \\ 2a + c = -1 \\ -2a + b + c = -2 \\ a + c = -3 \end{cases} \begin{matrix} \xleftrightarrow{ekv1-ekv2} \\ \xleftrightarrow{ekv3+ekv2} \end{matrix} \begin{cases} b + c = 2 \\ 2a + c = -1 \\ b + 2c = -3 \\ a + c = -3 \end{cases} \begin{matrix} \xleftrightarrow{ekv2-ekv4} \\ \xleftrightarrow{ekv3-ekv1} \end{matrix} \begin{cases} b + c = 2 \\ a = 2 \\ c = -5 \\ a + c = -3 \end{cases}$$

vilket ger $a = 2$, $b = 7$, $c = -5$.

(b) Med de ovan beräknade värdena på a, b, c fås

$$F\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -1\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

d.v.s. $\lambda_3 = -1$.

3. Låt $\underline{\mathbf{e}}_4$ och $\underline{\mathbf{e}}_3$ beteckna standardbaserna i \mathbb{R}^4 respektive \mathbb{R}^3 och skriv F på matrisform. Vi får

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, x_3, x_4) &= (x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4, -x_1 - 2x_2 - x_4, 2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4) = \\ &= \underline{\mathbf{e}}_3\begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \\ -x_1 - 2x_2 - x_4 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}_3\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = F\left(\underline{\mathbf{e}}_4\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

(a) För att beräkna $N(F)$ löser vi $AX = 0$.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & -1 & 0 \end{array}\right) &\stackrel{r_2+r_1}{\underset{r_3-2r_1}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & -5 & 0 \end{array}\right) &\stackrel{r_3+5r_2}{\underset{r_1-3r_2}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \implies \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2s+t \\ -s-t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

d.v.s. $(2, -1, 1, 0), (1, -1, 0, 1)$ är en bas i $N(F)$ vilket ger $\dim N(F) = 2$. Dimensionssatsen, Sats 7.5.6, sid 184 ger då att

$$\dim V(F) = \dim \mathbb{R}^4 - \dim N(F) = 4 - 2 = 2.$$

Då $V(F)$ = höljet av A :s kolonner och då vi ser att ingen av kolonnerna är parallell med någon annan så kan vi ta vilka två kolonner som helst som bas i $V(F)$, t.ex. de två första. Följaktligen, $(1, -1, 2), (3, -2, 1)$ är en bas i $V(F)$. Det går naturligtvis utmärkt att använda lösningen till $AX = 0$ för att explicit uttrycka kolonnvektor 3 och 4 som L.K. av kolonnvektorerna 1 och 2.

(b) Beräkna $F(1, 2, 3, 4)$ genom insättning i matrisformen. Vi får

$$F(1, 2, 3, 4) = F\left(\underline{\mathbf{e}}_4\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = \underline{\mathbf{e}}_3\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}_3\begin{pmatrix} 18 \\ -9 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

För att hitta alla $\mathbf{u} : F(\mathbf{u}) = F(1, 2, 3, 4)$ kan man förstås lösa ekvationen. Enklare är att observera

$$\begin{aligned} F(\mathbf{u}) = F(1, 2, 3, 4) &\iff \mathbf{0} = F(\mathbf{u}) - F(1, 2, 3, 4) = F(\mathbf{u} - (1, 2, 3, 4)) \iff \\ &\iff \mathbf{u} - (1, 2, 3, 4) \in N(F) \iff \end{aligned}$$

$$\iff \mathbf{u} = \mathbf{e}_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + s\mathbf{e}_4 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\mathbf{e}_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

4. (a) Sätt $\mathbf{u}_1 = (1, 0, 2, 0, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 1, 0, 2, 0)$, $\mathbf{u}_3 = (1, 2, 3, 4, 5)$. Då $\mathbf{u}_1 \perp \mathbf{u}_2$ väljer vi $\mathbf{f}_1 = \hat{\mathbf{u}}_1$, $\mathbf{f}_2 = \hat{\mathbf{u}}_2$ och ortogonaliserar \mathbf{u}_3 . Vi får

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1 &= \frac{1}{\sqrt{6}} \mathbf{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \mathbf{e} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{u}_{\parallel \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2} &= \frac{1}{6} \left(\mathbf{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right) \mathbf{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \left(\mathbf{e} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right) \mathbf{e} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{12}{6} \mathbf{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{10}{5} \mathbf{e} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{e} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \mathbf{u}_{\perp \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2} &= \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\parallel \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2} = \mathbf{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \mathbf{e} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{e} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{11}} \mathbf{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

och $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ är en ON-bas i \mathbb{U} . För att hitta utfyllnaden utnyttjar vi det ortogonala komplementet. Vi bestämmer en bas genom att ställa upp ortogonalitetsvillkoren,

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \end{array} \right) & \stackrel{r_3 \sim r_1}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -4 & 0 \end{array} \right) \implies \\ \implies \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 7t \\ -2s \\ -4t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

där vi observerar att "parametervektorerna" är ortogonala så vi kan välja

$$\mathbf{f}_4 = \frac{1}{\sqrt{5}} \mathbf{e} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_5 = \frac{1}{\sqrt{66}} \mathbf{e} \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

som ON-bas i \mathbb{U}^\perp . Därmed är $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_5$ en ON-bas i \mathbb{R}^5 .

- (b) Vilket avstånd vi börjar med, $\mathbf{v} = (4, -2, -1, 1, 1)$ till \mathbb{U} eller \mathbf{v} till \mathbb{U}^\perp , beror på vilken projektion vi vill räkna ut först. När vi kan välja vilken vi vill är det normalt enklast att projicera på den med lägst dimension, här \mathbb{U}^\perp . Man kan ju dock kika på hur det ser ut i det andra rummet. Då kanske man observerar att $\mathbf{v} \perp \mathbf{f}_2$ och \mathbf{f}_3 så att beräkna $\mathbf{v}_{\parallel\mathbb{U}}$ blir därmed mest beräkningseffektivt. Det avstånd vi beräknar först blir därför (minsta avståndet = ortogonala avståndet)

$$\begin{aligned} \text{Avstånd}(\mathbf{v}, \mathbb{U}^\perp) &= \min_{\mathbf{u} \in \mathbb{U}^\perp} |\mathbf{v} - \mathbf{u}| = |\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\parallel\mathbb{U}^\perp}| = |\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}}| = |\mathbf{v}_{\parallel\mathbb{U}}|, \\ \mathbf{v}_{\parallel\mathbb{U}} &= (\mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_1) \mathbf{f}_1 = \frac{1}{6} \left(\mathbf{e} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \mathbf{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{6} \mathbf{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow |\mathbf{v}_{\parallel\mathbb{U}}| = \frac{\sqrt{6}}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Avstånd}(\mathbf{v}, \mathbb{U}) &= \min_{\mathbf{u} \in \mathbb{U}} |\mathbf{v} - \mathbf{u}| = |\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\parallel\mathbb{U}}| = \left| \mathbf{e} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \mathbf{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \\ &= \frac{1}{2} \left| \mathbf{e} \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \mathbf{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \mathbf{e} \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \frac{\sqrt{86}}{2} \end{aligned}$$

5. Skriv polynomen på bas-koordinatform ($\underline{\mathbf{x}} = (1 \ x \ x^2 \ x^3 \ x^4) =$ standardbasen i \mathbb{P}_4)

$$\mathbb{U} = \left[\mathbf{p}_1 = \underline{\mathbf{x}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{p}_2 = \underline{\mathbf{x}} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{p}_3 = \underline{\mathbf{x}} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{p}_4 = \underline{\mathbf{x}} \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

och ställ upp beroendeekvationen och L.K. = godt. polynom. Vi får systemet

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & -4 & 4 & 0 & a_0 \\ -2 & -2 & 1 & -5 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & a_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & a_4 \end{array} \right) \begin{array}{l} r_2+2r_1 \\ r_5-r_1 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & -4 & 4 & 0 & a_0 \\ 0 & -2 & -7 & 3 & 0 & 2a_0+a_1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & a_3 \\ 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & -a_0+a_4 \end{array} \right) \begin{array}{l} r_2+2r_3 \\ r_4-r_3 \\ r_5-r_3 \\ r_2 \leftrightarrow r_3 \\ \sim \end{array} \\ &\sim \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & -4 & 4 & 0 & a_0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & -5 & 5 & 0 & 2a_0+a_1+2a_2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -a_2+a_3 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 0 & -a_2-a_0+a_4 \end{array} \right) \begin{array}{l} r_1-4r_4 \\ r_2+r_4 \\ r_3-5r_4 \\ r_5+4r_4 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0+4a_2-4a_3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -a_2+a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2a_0+a_1+7a_2-5a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_0-5a_2+4a_3+a_4 \end{array} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2t \\ t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \implies \mathbf{p}_4 = 2\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3.$$

d.v.s. \mathbf{p}_4 kan utses till löjligt element och strykas enligt satsen om löjligen element, Sats 5.3.16, sid 111.

Från ekvationen "L.K. = godt. polynom" får vi ekvationerna för \mathbb{U}

$$\mathbb{U} = [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3] = \left\{ \mathbf{q} \in \mathbb{P}_5: \begin{array}{l} 2a_0 + a_1 + 7a_2 - 5a_3 = 0, \\ -a_0 - 5a_2 + 4a_3 + a_4 = 0 \end{array} \right\}$$

För att hitta utfyllnaden använder vi Plus-satsen, Sats 5.4.21, sid 123 två gånger och bryter mot ett villkor i taget. Sätt, t.ex. $\mathbf{q}_4 = x$ som bryter mot första ekvationen, men uppfyller den andra. Då är $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{q}_4$ linjärt oberoende enligt plussatsen. Välj sedan, t.ex. $\mathbf{q}_5 = 1$ som bryter mot den återstående ekvationen. Då är $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{q}_4, \mathbf{q}_5$ linjärt oberoende enligt plussatsen. Då de är "rätt antal" är de också en bas i \mathbb{P}_4 . Slutligen gäller

$$x = 0 \cdot \mathbf{p}_1 + 0 \cdot \mathbf{p}_2 + 0 \cdot \mathbf{p}_3 + 1 \cdot \mathbf{q}_4 + 0 \cdot \mathbf{q}_5 = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3 & \mathbf{q}_4 & \mathbf{q}_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

d.v.s. x har koordinaterna 0, 0, 0, 1, 0 i den bas vi valt.

6. Skriv Q på matrisform och beräkna egenvärden och egenvektorer.

$$Q(x_1, x_2) = -x_1^2 + 16x_1x_2 + 11x_2^2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 8 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = X_{\mathbf{e}}^t A_{eb} X_{eb},$$

$$\det(A_{\lambda}I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 8 \\ 8 & 11-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(11-\lambda) - 64 = \lambda^2 - 10\lambda - 75 = 0 \iff$$

$$\iff \lambda = 5 \pm \sqrt{25 + 75} = 5 \pm 10 = 15, -5,$$

$$\underline{\underline{\lambda = 15}}: \begin{pmatrix} -16 & 8 & | & 0 \\ 8 & -4 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \implies X_{15} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\underline{\underline{\lambda = -5}}: \begin{pmatrix} 4 & 8 & | & 0 \\ 8 & 16 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \implies X_{-5} = t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \mathbf{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \mathbf{e} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{\mathbf{f}}} = \mathbf{e} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Då egenvärdena har olika tecken är båda kurvorna hyperbler. Vi behandlar kurvorna en i taget.

$$\underline{\underline{Q(\mathbf{u}) = 15}}: \lambda_{\min} |\mathbf{u}|^2 = -5 |\mathbf{u}|^2 \leq Q(\underline{\mathbf{f}} X_{\underline{\mathbf{f}}}) = 15y_1^2 - 5y_2^2 = 15 \leq \lambda_{\max} |\mathbf{u}|^2 = 15 |\mathbf{u}|^2$$

Ur ovanstående ser vi att den första olikheten är trivialt uppfylld, $-5 |\mathbf{u}|^2 \leq 0 < 15$ för alla $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$. Ur den andra fås

$$15 \leq 15 |\mathbf{u}|^2 \iff |\mathbf{u}|^2 \geq 1 \iff |\mathbf{u}| \geq 1$$

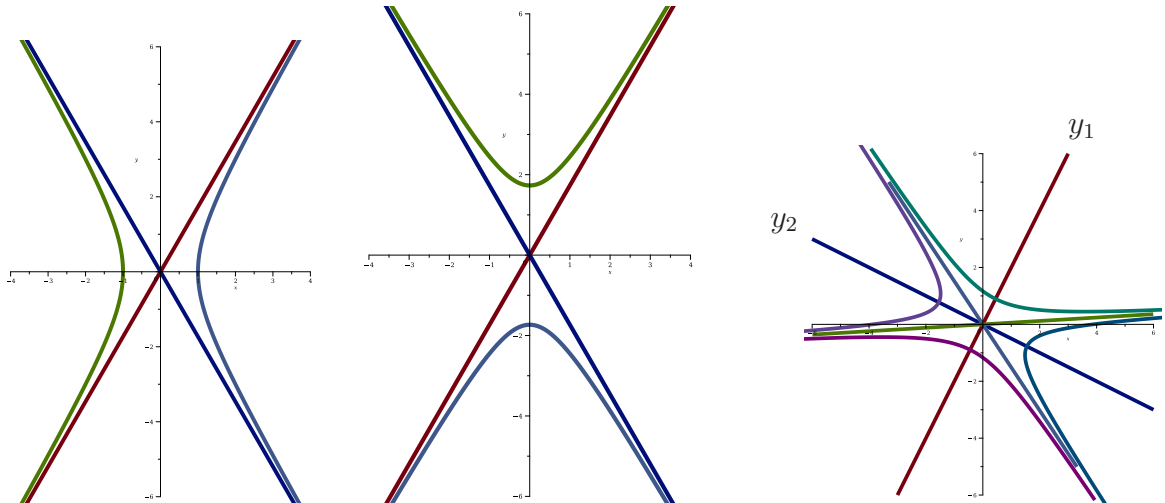
med likhet om \mathbf{u} är en egenvektor av längd 1 till 15, d.v.s. $\mathbf{u} = \pm \mathbf{f}_1$. Minsta avstånd från kurvan till origo är alltså 1 och punkterna $\pm(1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$ ligger på detta avstånd.

$$\underline{\underline{Q(\mathbf{u}) = -15}} : \quad -5|\mathbf{u}|^2 \leq Q(\mathbf{f} X_{\mathbf{f}}) = 15y_1^2 - 5y_2^2 = -15 \leq 15|\mathbf{u}|^2$$

Ur ovanstående ser vi att den andra olikheten är trivialt uppfylld, $-15 < 0 \leq 15|\mathbf{u}|^2$ för alla $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$. Ur den första fås

$$-5|\mathbf{u}|^2 \leq -15 \iff |\mathbf{u}|^2 \geq 3 \iff |\mathbf{u}| \geq \sqrt{3}$$

med likhet om \mathbf{u} är en egenvektor av längd $\sqrt{3}$ till -5 , d.v.s. $\mathbf{u} = \pm\sqrt{3}\mathbf{f}_2$. Minsta avstånd från kurvan till origo är alltså $\sqrt{3}$ och punkterna $\pm(-2\sqrt{3}/5, \sqrt{3}/5)$ ligger på detta avstånd.



Figur 1: Hyperblerna, med asymptoter (krävs ej) ritade i egenbas respektive standardbasen. Först $15y_1^2 - 5y_2^2 = 15$ och sen $15y_1^2 - 5y_2^2 = -15$

7. Då både F och G är isometrier blir $F \circ G$ det också eftersom

$$|F \circ G(\mathbf{u})| = |F(G(\mathbf{u}))| = [F \text{ isom.}] = |G(\mathbf{u})| = [G \text{ isom.}] = |\mathbf{u}|.$$

Då båda är vridningar är $\det A_F = \det A_G = 1$ enligt Sats 7.7.6, sid 197. Produktlagen för determinanter, Sats 4.8.1, sid 96 ger då att

$$\det A_{F \circ G} = \det(A_F \cdot A_G) = \det A_F \cdot \det A_G = 1 \cdot 1 = 1$$

så även $F \circ G$ är en vridning. Därmed har den en vridningsaxel som kan beräknas genom att lösa ekvationen $A_{F \circ G} X = X$ eftersom vridningsaxeln avbildas på sig själv.

$$A_{F \circ G} = A_F \cdot A_G = \frac{1}{3^2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 & 8 & -1 \\ 4 & -1 & 8 \\ 7 & -4 & -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} B,$$

$$A_{F \circ G} X = \frac{1}{9} B X = X \iff B X = 9 X \iff (B - 9I) X = 0,$$

$$\begin{pmatrix} -5 & 8 & -1 & | & 0 \\ 4 & -10 & 8 & | & 0 \\ 7 & -4 & -13 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} r_2/2 \\ -2r_3 \\ r_1 \leftrightarrow r_2 \\ \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 & | & 0 \\ -10 & 16 & -2 & | & 0 \\ -14 & 8 & 26 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} r_2+5r_1 \\ r_3+7r_1 \\ \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 & | & 0 \\ 0 & -9 & 18 & | & 0 \\ 0 & -27 & 54 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} r_3-3r_2 \\ r_2/9 \\ \sim \end{matrix} \\ \sim \begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 & | & 0 \\ 0 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \implies X = \begin{pmatrix} (10-4)t/2 = 3t \\ 2t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Då vi vet att $F \circ G$ är en vridning vet vi att dess matris i rätt bas blir

$$(A_{F \circ G})_{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

vilket ger att spåret av $(A_{F \circ G})_{\mathbf{f}} = 1 + 2 \cos \theta = -\frac{1}{9} =$ spåret av $(A_{F \circ G})_{\mathbf{e}}$. Härav följer nu att

$$2 \cos \theta = -\frac{10}{9} \iff \cos \theta = -\frac{5}{9} \iff \theta = \arccos -\frac{5}{9}$$

eftersom vridningsvinkeln alltid ligger mellan 0 och π . För att bestämma orienteringen beräknar vi bilden av en vektor ortogonal mot vridningsaxeln, t.ex. $\mathbf{u} = (0, -1, 2)$.

$$\begin{aligned} F \circ G(\mathbf{u}) &= \frac{1}{9} \mathbf{e} \begin{pmatrix} 4 & 8 & -1 \\ 4 & -1 & 8 \\ 7 & -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \mathbf{e} \begin{pmatrix} -10 \\ 17 \\ -4 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{u} \times F \circ G(\mathbf{u}) &= \frac{1}{9} \mathbf{e} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \mathbf{e} \begin{pmatrix} -10 \\ 17 \\ -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \mathbf{e} \begin{pmatrix} -30 \\ -20 \\ -10 \end{pmatrix} = -\frac{10}{9} \mathbf{e} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &\quad \begin{matrix} 0 & -10 \\ -1 & 17 \end{matrix} \end{aligned}$$

negativ konstant-vridningsaxeln vilket ger att vridningen sker medurs, se boken sid 196. (Går förstas utmärkt att bestämma en höger ON-bas med \mathbf{f}_1 som vridningsaxel och byta till denna. Gör man det får man

$$(A_{F \circ G})_{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5/9 & 2\sqrt{14}/9 \\ 0 & -2\sqrt{14}/9 & -5/9 \end{pmatrix}.$$

Jämför med matrisen i "rätt bas" ovan så ser du att $\sin \theta = -2\sqrt{14}/9 < 0$ vilket innebär vridning medurs.) Sammanfattningsvis, $F \circ G$ är också en vridning, vridningen sker medurs vinkeln $\arccos(-5/9)$ sett från toppen av vridningsaxeln $(3, 2, 1)$.