Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Ulf Janfalk

Utbildningskod: TATA31
Modul: TEN1

Tentamen i Linjär algebra (TATA31/TEN1) 2026–03–16, 8–13.

Inga hjälpmedel, förutom passare, linjal eller gradskiva. OBS! Inga formler eller liknande tryckta på linjal eller gradskiva. Ej räknedosa.
För godkänt räcker 9 poäng och minst 3 uppgifter med 2 eller 3 poäng. Godkänd kontrollskrivning ($\geq$ 11p) ht2025 ger 3 poäng på uppgift 1 (som alltså inte behöver lösas) och 16p eller mer ger 4 poäng på uppgift 1. Markera detta genom att skriva ”G” respektive ”G+1” i rutan för uppgift 1 på raden märkt “X här/*here*”.
Fullständiga motiveringar krävs. Lösningar läggs ut senast tisdag 17/3 på

http://courses.mai.liu.se/GU/TATA31/tentor.html

Resultat meddelas via e-post inom 15 arbetsdagar.
Alla koordinater för vektorer och punkter är, om ej annat anges, givna med avseende på ett positivt orienterat ON-system, $\mathbb{R}^n$ är ett euklidiskt rum med standardskalärprodukten och standardbasen ett positivt orienterat ON-system.

1. En ljusstråle går genom punkten $P_1 = (1, 1, 1)$ i riktningen $(3, 2, 1)$

(1 p) (a) I vilken punkt träffar ljusstrålen planet Π: $x - y + z = 7$?

(2 p) (b) Ljusstrålen reflekteras i planet Π. Vilken riktning har den reflekterade strålen?

2. Den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^5$ har i standardbasen matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 3 & 1 \\ 3 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Den till F adjungerade avbildningen $F^*\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ har A^t som avbildningsmatris i standardbasen.

(2 p) (a) Bestäm avbildningsmatrisen till $F^* \circ F$ och en ON-bas i $\mathbb{R}^2$ bestående av egenvektorer till $F^* \circ F$.

(1 p) (b) Låt $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ beteckna ON-basen från (a). Beräkna $F(\mathbf{f}_1) \bullet F(\mathbf{f}_1)$, $F(\mathbf{f}_2) \bullet F(\mathbf{f}_2)$ och $F(\mathbf{f}_1) \bullet F(\mathbf{f}_2)$. (Vad ser du?)

3. Definiera underrummet

$$\mathbb{U} = \left[1+x+x^2+x^4,\ x+x^2+x^3+x^4,\ -1+2x^2+x^3-x^4,\ 1+2x+2x^2+x^3+2x^4\right] \subset \mathbb{P}_4.$$

Bestäm en bas i $\mathbb{U}$ och avgör vilka av polynomen

$$\mathbf{q}_1 = 1 + x + x^4,\ \mathbf{q}_2 = 2 + 2x + 3x^4,\ \mathbf{q}_3 = -2x^2 + x^4$$

som tillhör $\mathbb{U}$.

4. Den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ har i standardbasen matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(2 p) (a) Bestäm ON-baser i F:s noll- och värderum samt verifiera att dessa tillsammans blir en ON-bas i $\mathbb{R}^4$.

(1 p) (b) Bestäm koordinaterna för vektorn $(1, 2, 3, 4)$ i den bas du valt.

5. För den linjära avbilningen $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gäller

$$F(1, 2, 3) = (1, -1, 1), \quad F(2, -1, 0) = (0, 2, 1), \quad F(1, 0, 1) = (1, 1, 2).$$

(2 p) (a) Bestäm F:s matris i standardbasen.

(1 p) (b) Bevisa att din matris är korrekt genom att använda den till att beräkna de ovan angivna värdena $F(1, 2, 3)$, $F(2, -1, 0)$, $F(1, 0, 1)$

(3 p) 6. Ange den andragradskurva $y = ax^2 + bx + c$ som i minsta-kvadratmening bäst ansluter till värdena i nedanstående tabell:

x	-2	-1	0	1	2
y	-1	-2	-1	1	3

(3 p) 7. Låt $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ vara standardbasen i $\mathbb{R}^2$ och låt

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En ellips har i basen $\underline{\mathbf{f}}$ ekvationen

$$\left(\frac{y_1 + \frac{3}{2}}{\sqrt{3}} \right)^2 + \left(\frac{y_2 - \frac{1}{2}}{3} \right)^2 = 1.$$

Hur ser ellipsens ekvation ut i standardbasen och vad är koordinaterna för dess medelpunkt i standardbasen? Rita ellipsen ***noggrant*** i standardbasen.

Lösningsförslag till TATA31, Linjär algebra, 2026–03–16.

1. (a) Kalla den sökta skärningspunkten P_0. Ljusstrålen följer linjen

$$L\colon\ \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

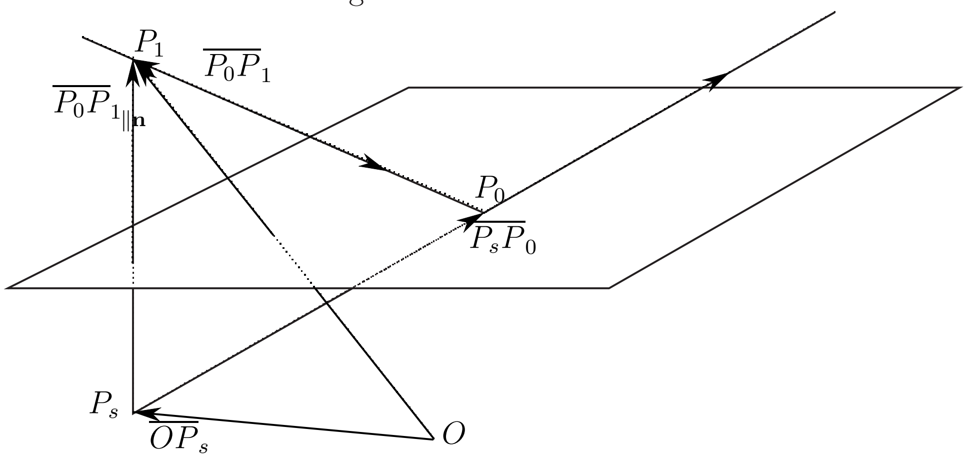
Insättning av L i Π:s ekvation ger

$$x - y + z = (1+3t) - (1+2t) + (1+t) = 1 + 2t = 7 \iff t = 3 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \overline{OP}_0 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix},$$

d.v.s. $P_0 = (10, 7, 4)$.

(b) Betrakta nedanstående figur:



Låt $\mathbf{n} = (1, -1, 1) = \Pi$:s normalvektor. Bestäm spegelbilden P_s av P_1.

$$\overline{P_0P_1} = \overline{OP}_1 - \overline{P}_0 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -9 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$$\overline{P_0P_1}_{\|\mathbf{n}} = \frac{1}{3}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -9 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -2\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\overline{OP}_s = \overline{OP}_1 - 2\overline{P_0P_1}_{\|\mathbf{n}} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 4\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$\overline{P_sP_0} = \overline{OP}_0 - \overline{OP}_s = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -1 \end{pmatrix},$$

d.v.s. den reflekterade ljusstrålen har riktningen $(5, 10, -1)$.

2. (a) Enligt Sats 7.6, sid 188 gäller att avbildningsmatrisen till $F^*{\circ}F$ är A^tA. Vi får

$$A^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 3 & 1 \\ 3 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 15 \\ 15 & 24 \end{pmatrix},$$

$$\det(A^tA-\lambda I)=\begin{vmatrix}24-\lambda & 15\\ 15 & 24-\lambda\end{vmatrix}=(24-\lambda)^2-15^2=0 \iff \lambda=24\pm 15=39,9,$$

$$\underline{\underline{\lambda=9}}:\ \left(\begin{array}{cc|c}15 & 15 & 0\\ 15 & 15 & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)\Longrightarrow X_9=t\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\quad t\in\mathbb{R},$$

$$\underline{\underline{\lambda=39}}:\ \left(\begin{array}{cc|c}-15 & 15 & 0\\ 15 & -15 & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c}-1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)\Longrightarrow X_{39}=t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\quad t\in\mathbb{R},$$

$$\mathbf{f}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\qquad \mathbf{f}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

är en ON-bas i $\mathbb{R}^2$ av egenvektorer till $F^*\circ F$.

(b) Beräkna de angivna funktionsvärdena och skalärprodukterna. Vi får

$$F(\mathbf{f}_1)=\frac{1}{\sqrt{2}}F\left(\underline{\mathbf{e}}_2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}_5\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\\ 3 & 1\\ 3 & 3\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}_5\begin{pmatrix}-1\\3\\2\\0\\-2\end{pmatrix},$$

$$F(\mathbf{f}_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}F\left(\underline{\mathbf{e}}_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}_5\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\\ 3 & 1\\ 3 & 3\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}_5\begin{pmatrix}3\\1\\4\\6\\4\end{pmatrix},$$

$$F(\mathbf{f}_1)\bullet F(\mathbf{f}_1)=|F(\mathbf{f}_1)|^2=\frac{1}{2}\cdot 18=9=\text{ egenvärdet till }\mathbf{f}_1,$$

$$F(\mathbf{f}_2)\bullet F(\mathbf{f}_2)=|F(\mathbf{f}_2)|^2=\frac{1}{2}\cdot 78=39=\text{ egenvärdet till }\mathbf{f}_2,$$

$$F(\mathbf{f}_1)\bullet F(\mathbf{f}_2)=\frac{1}{2}\cdot\underline{\mathbf{e}}_5\begin{pmatrix}-1\\3\\2\\0\\-2\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}_5\begin{pmatrix}3\\1\\4\\6\\4\end{pmatrix}=0,$$ d.v.s. ortogonaliteten mellan $\mathbf{f}_1$ och $\mathbf{f}_2$ bevaras.

3. Kalla de genererande polynomen $\mathbf{p}_1,\dots,\mathbf{p}_4$ och ställ i vanlig ordning upp beroende-ekvationen för $\mathbf{p}_1,\dots,\mathbf{p}_4$ samt "L.K. = godtyckligt polynom", d.v.s.

$$\lambda_1\mathbf{p}_1+\lambda_2\mathbf{p}_2+\lambda_3\mathbf{p}_3+\lambda_4\mathbf{p}_4=\mathbf{0},\ a_1+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$$

vilket ger systemen

$$\left(\begin{array}{cccc|cc}1 & 0 & -1 & 1 & 0 & a_0\\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & a_1\\ 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & a_2\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & a_3\\ 1 & 1 & -1 & 2 & 0 & a_4\end{array}\right)\underset{\substack{r_2-r_1\\ r_3-r_1\\ r_5-r_1}}{\sim}\left(\begin{array}{cccc|cc}1 & 0 & -1 & 1 & 0 & a_0\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -a_0+a_1\\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & -a_0+a_2\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & a_3\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -a_0+a_4\end{array}\right)\underset{\substack{r_3-r_2\\ r_4-r_2\\ r_5-r_2}}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cc}1 & 0 & -1 & 1 & 0 & a_0\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -a_0+a_1\\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -a_1+a_2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0-a_1+a_3\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -a_1+a_4\end{array}\right)\underset{\substack{r_3+2r_5\\ r_3\leftrightarrow r_5}}{\sim}\left(\begin{array}{cccc|cc}1 & 0 & -1 & 1 & 0 & a_0\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -a_0+a_1\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -a_1+a_4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0-a_1+a_3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3a_1+a_2+2a_4\end{array}\right)\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_3 - \lambda_4 = t \\ -\lambda_3 - \lambda_4 = t \\ 0 \\ -t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

som insatt i beroendeekvationen ger att $\mathbf{p}_4 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$ (vilket också syns tydligt i den första koefficientmatrisen ovan då kolonn1 + kolonn 2 blir kolonn 4). Följaktligen kan vi utse $\mathbf{p}_4$ till löjligt element. Satsen om löljliga element, Sats 5.3.16, sid 111 ger då att

$$\mathbb{U} = [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3].$$

Då det nu inte längre finns några löjliga element bland de genererande vektorerna är dessa linjärt oberoende (Sats 5.4.4, sid 114) och därmed en bas för sitt hölje.
Ur "L.K. = godtyckligt polynom" ser vi att denna är lösbar, d.v.s. det godtyckliga polynomet är en linjärkombination av de givna omm

$$a_0 - a_1 + a_3 = 0, \quad -3a_1 + a_2 + 2a_4 = 0, \quad \text{d.v.s.}$$

$$\mathbb{U} = [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3] =$$

$$= \left\{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 \in \mathbb{P}_4 \colon \begin{array}{l} a_0 - a_1 + a_3 = 0 \\ -3a_1 + a_2 + 2a_4 = 0 \end{array} . \right\}$$

Insättning av $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$ i villkoren ovan ger

	$a_0 - a_1 + a_3$	$-3a_1 + a_2 + 2a_4$	
$\mathbf{q}_1 = 1 + x + x^4$	$1 - 1 + 0 = 0$	$-3 + 0 + 1 = -2 \neq 0$	$\mathbf{q}_1 \notin \mathbb{U}$
$\mathbf{q}_2 = 2 + 2x + 3x^4$	$2 - 2 + 0 = 0$	$-6 + 0 + 6 = 0$	$\mathbf{q}_2 \in \mathbb{U}$
$\mathbf{q}_3 = -2x^2 + x^4$	$-0 + 0 = 0$	$0 - 2 + 2 = 0$	$\mathbf{q}_3 \in \mathbb{U}$

4. (a) Lös $AX = 0$, tillika beroendeekvationen för kolonnerna. För kontrollens skull tar vi med "L.K. = godtycklig vektor" också.Vi får

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & y_1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & y_2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & y_3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & y_4 \end{array}\right) \underset{\substack{r_4 - r_1 \\ r_1 - 2r_3 \\ r_2 - r_3 \\ r_1 \leftrightarrow r_3}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & y_3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & y_2 - y_3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & y_1 - 2y_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y_1 + y_4 \end{array}\right) \underset{r_3 + r_2}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & y_3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & y_1 - 2y_3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & y_2 - 3y_3 + y_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y_1 + y_4 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 - x_4 - t \\ -x_3 = 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ovanstående ger då att $N(F) = [(-1, 0, 0, 1)]$ och att $\mathbf{f}_4 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 0, 1)$ är en ON-bas i $N(F)$.

Då $V(F)$ = höljet av kolonnvektorerna och beroendeekvationen för dessa är $AX = 0$ ser vi att $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_4$ (vilket förstås syns om vi tittar på matrisen) och vi kan därmed utse $\mathbf{k}_4$ till löjligt element. Härav följer det att $V(F) = [\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3]$. Då A är symmetrisk följer ur Sats 7.7.9, sid 199 att $N(F)$ och $V(F)$ är ortogonala mot varann vilket ger att ekvationen för $V(F)$ är $-y_1 + y_4 = 0$ vilket var precis det vi fick från "L.K. = godtycklig vektor".
Då ingen av kolonnvektorerna är ortogonal mot någon av de andraär det bara att välja en kolonnvektorerna som utgångspunkt och starta Gram-Schmidts ortogonaliseringsprocess.

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \mathbf{k}_{2_{\|\mathbf{f}_1}} = \frac{1}{3}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{4}{3}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{k}_{2_{\perp\mathbf{f}_1}} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{4}{3}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\6\\3\\3\end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}4\\4\\0\\4\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\-1\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{15}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\-1\end{pmatrix}, \quad \mathbf{k}_{1_{\|\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2}} = (\mathbf{k}_1\bullet\mathbf{f}_1)\,\mathbf{f}_1 + (\mathbf{k}_1\bullet\mathbf{f}_2)\,\mathbf{f}_2 =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\1\\1\\2\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{15}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\1\\1\\2\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\-1\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\-1\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{5}{3}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{15}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}25\\25\\0\\25\end{pmatrix} + \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\-1\end{pmatrix}\right) =$$

$$= \frac{1}{5}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}24\\27\\3\\24\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}8\\9\\1\\8\end{pmatrix}, \quad \mathbf{k}_{1_{\perp\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2}} = \frac{1}{5}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}10\\5\\5\\10\end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}8\\9\\1\\8\end{pmatrix}\right) =$$

$$= \frac{1}{5}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\-4\\4\\2\end{pmatrix} = \frac{2}{5}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\\1\end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\\1\end{pmatrix}.$$

Följaktligen är

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{15}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\-1\end{pmatrix}, \mathbf{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\\1\end{pmatrix} \text{ och } \mathbf{f}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

ON-baser i $V(F)$respektive $N(F)$. Kontrollerar vi ortogonalitetn och längd med hjälp av skalärprodukt ser vi att alla skalärprodukter mellan olika basvektorer är 0 och att alla skalärprodukter av basvektor med sig själv blir 1, dvs de är en ON-mängd med “rätt antal” element och därmed en ON-bas i $\mathbb{R}^4$.

(b) Betrakta bassamandet $\underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{e}}\,T$. Då $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4$ är en ON-bas kommer T att vara en ON-matris och därmed gäller $T^{-1} = T^t$. Härav följer

$$(1,2,3,4) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = [\underline{\mathbf{e}} = \underline{\mathbf{f}}\,T^{-1} = \underline{\mathbf{f}}\,T^t] =$$

$$= \underline{\mathbf{f}} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{15} & 2/\sqrt{15} & 3/\sqrt{15} & -1/\sqrt{15} \\ 1/\sqrt{10} & -2/\sqrt{10} & 2/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{f}} \begin{pmatrix} 7/\sqrt{3} \\ 8/\sqrt{15} \\ 7/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

5. (a) Vi söker alltså den matris A för vilken gäller

$$F(1,2,3) = F\left(\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \underline{\mathbf{e}}\,A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$F(2,-1,0) = F\left(\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \underline{\mathbf{e}}\,A \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$F(1,0,1) = F\left(\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \underline{\mathbf{e}}\,A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Formulerar vi ovanstående i en matrisekvation får vi

$$A \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \iff A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Bestäm inversen på vanligt sätt:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2-2r_1 \\ r_3-3r_1 \\ 6r_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 30 & 10 & 15 & 0 & -5 \end{array}\right) \overset{\substack{r_3+6r_2 \\ 2r_1 \\ -r_2}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 6 & -5 \end{array}\right) \overset{\substack{r_1+r_3 \\ r_2+r_3 \\ -r_3 \\ 2r_2/5}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 0 & 5 & 6 & -5 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -6 & 5 \end{array}\right) \overset{r_1-2r_2}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -6 & 5 \end{array}\right) \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Följaktligen

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & -6 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & -4 & 4 \\ 0 & -4 & 2 \\ -3 & -8 & 7 \end{pmatrix}.$$

(b) Återstår att kontrollera matrisen.

$$F(1,2,3)=F\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right)=\underline{\mathbf{e}}\,\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2&-4&4\\0&-4&2\\-3&-8&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix}=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},$$

$$F(2,-1,0)=F\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}\right)=\underline{\mathbf{e}}\,\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2&-4&4\\0&-4&2\\-3&-8&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix}=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix},$$

$$F(1,0,1)=F\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)=\underline{\mathbf{e}}\,\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2&-4&4\\0&-4&2\\-3&-8&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix}=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

vilket visar att vår matris är korrekt.

6. Insättning av $y = ax^2 + bx + c$ i värdetabellen ger

x	y	ax^2+bx+c
-2	-1	$4a-2b+c$
-1	-2	$a-b+c$
0	-1	c
1	1	$a+b+c$
2	3	$4a+2b+c$

som i matrisform kan skrivas

$$\begin{pmatrix}4a-2b+c\\a-b+c\\c\\a+b+c\\4a+2b+c\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}4&-2&1\\1&-1&1\\0&0&1\\1&1&1\\4&2&1\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}-1\\-2\\-1\\1\\3\end{pmatrix}}_{Y}.$$

Bestäm minsta-kvadratlösningen till detta (olösbara) ekvationssystem.

$$A^tA=\begin{pmatrix}4&1&0&1&4\\-2&-1&0&1&2\\1&1&1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&-2&1\\1&-1&1\\0&0&1\\1&1&1\\4&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}34&0&10\\0&10&0\\10&0&5\end{pmatrix},$$

$$A^tY=\begin{pmatrix}4&1&0&1&4\\-2&-1&0&1&2\\1&1&1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-2\\-1\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\11\\0\end{pmatrix}$$

vilket ger normalekvationerna

$$\left(\begin{array}{ccc|c}34&0&10&7\\0&10&0&11\\10&0&5&0\end{array}\right)\overset{\substack{r_3/5\\r_1-17r_3\\r_1\leftrightarrow r_3}}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}2&0&1&0\\0&10&0&11\\0&0&-7&7\end{array}\right)\Longrightarrow\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2\\11/10\\-1\end{pmatrix}.$$

Följaktligen polynomet $(5x^2 + 11x - 10)/10$ ansluter bäst, i minstakvadrat-mening till ovan givna data.

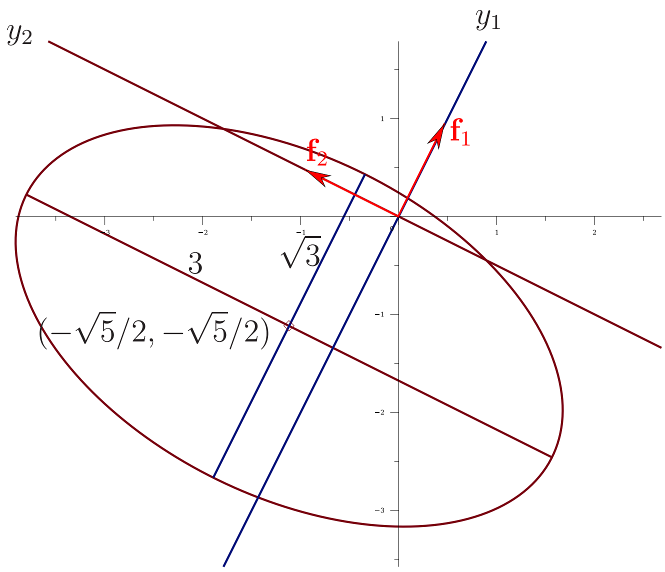
7. Från den givna basen fås bassambandet

$$\underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{e}}\,T = \frac{1}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \iff \underline{\mathbf{e}} = \underline{\mathbf{f}}\,T^{-1} = \underline{\mathbf{f}}\,T^{t} = \frac{1}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

eftersom T är en ON-matris. Ur ekvationen utläses att ellipsens medelpunkt M har ortsvektorn

$$\overline{OM} = \underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} -3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -5 \\ -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ -\sqrt{5} \end{pmatrix},$$

d.v.s. ellipsen har medelpunkt $M = (-\sqrt{5}/2, -\sqrt{5}/2)$. Vidare har storaxeln längd 3 i $\mathbf{f}_2$-riktningen och lillaxeln längd $\sqrt{3}$ i $\mathbf{f}_1$-riktningen. Därmed har vi den info vi behöver för att kunna rita ellipsen *noggrant*.



Återstår nu att ta fram ekvationen i de ursprungliga koordinaterna. Utveckla kvadraterna och skriv som kvadratisk form på matrisform.

$$1 = \left(\frac{y_1 + \frac{3}{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{y_2 - \frac{1}{2}}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}\left(y_1^2 + 3y_1 + \frac{9}{4}\right) + \frac{1}{9}\left(y_2^2 - y_2 + \frac{1}{4}\right) \iff$$

$$\iff 9 = 3y_1^2 + 9y_1 + \frac{27}{4} + y_2^2 - y_2 + \frac{1}{4} = 3y_1^2 + y_2^2 + 9y_1 - y_2 + 7 \iff$$

$$\iff 2 = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = X_{\underline{\mathbf{f}}}^t A_{\underline{\mathbf{f}}} X_{\underline{\mathbf{f}}} + \begin{pmatrix} 9 & -1 \end{pmatrix} X_{\underline{\mathbf{f}}} =$$

$$= \left[X_{\underline{\mathbf{f}}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = T^t X_{\underline{\mathbf{e}}}\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}(T^t X_{\underline{\mathbf{e}}})^t \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} X_{\underline{\mathbf{e}}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 9 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5} X_{\underline{\mathbf{e}}}^{\,t} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{(T^t)^t = T}\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} X_{\underline{\mathbf{e}}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 11 & 17 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{5} X_{\underline{\mathbf{e}}}{}^{t} \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 13 \end{pmatrix} X_{\underline{\mathbf{e}}} + \frac{1}{\sqrt{5}}(11x_1 + 17x_2) = \\
&= \frac{1}{5}\left(7x_1^2 + 8x_1x_2 + 13x_2^2\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}(11x_1 + 17x_2) \iff \\
&\iff 7x_1^2 + 8x_1x_2 + 13x_2^2 + \sqrt{5}(11x_1 + 17x_2) = 10.
\end{aligned}
$$