

Kontrollskrivning i Linjär algebra 2025–10–28, 8–12.

Inga hjälpmedel, förutom passare, linjal eller gradskiva. OBS! Inga formler eller liknande tryckta på linjal eller gradskiva. Ej räknedosa.

På uppgift 1–14 skall **endast svar** ges. Varje rätt svar ger 1 poäng, fel svar 0 poäng.

Flera svar får och bör ges på samma blad, helst i nummerordning.

Uppgift 15 och 16 ger tre poäng vardera; **fullständiga och välmotiverade lösningar krävs.**

Minst 11 poäng tillgodoräknas som tre poäng på uppgift 1 på tentamen.

Minst 16 poäng ger ytterligare en bonuspoäng på tentamen.

Rätten att tillgodoräkna sig bonus består under läsåret 2025-2026.

Resultatet meddelas via e-post. Lösningar läggs ut efter skrivtidens slut på

<http://courses.mai.liu.se/GU/TATA31/tentor.html>

Om inget annat sägs, är alla koordinater för vektorer i planet och rummet givna relativt en högerorienterad ON-bas: $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ i planet, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ i rummet.

1. Skriv nedanstående ekvationssystem i matrisform och ange dess lösningar på parameterform

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 + 5x_4 &= 1 \\ &x_3 + x_4 &= 2 \\ x_2 &+ &x_5 &= 7 \end{cases}.$$

2. Betrakta matriserna

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Beräkna $\det/de$ av uttrycken nedan som är definierade:

$$AB, \quad B^t A, \quad A^t B, \quad BA^t.$$

3. Rita ett vanligt rätvinkligt koordinatsystem (höger ON) och låt **fem rutor** svara mot **en längdenhet**. Låt $\underline{\mathbf{e}}$ vara en ON-bas där $\mathbf{e}_1$ pekar i den horisontella koordinataxelns riktning och $\mathbf{e}_2$ i den lodräta axelns riktning. Rita i detta koordinatsystem in, så exakt som möjligt, vektorerna $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 - 4\mathbf{e}_2$, $\mathbf{v} = -2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$, den ortogonala projektionen av $\mathbf{u}$ på $\mathbf{v}$ och den ortogonala projektionen av $\mathbf{v}$ på $\mathbf{u}$.
4. Låt $\mathbf{u}_1 = e^x + 2\sqrt{x}$, $\mathbf{u}_2 = -3e^x + \sqrt{x}$ och $\mathbf{v} = 11e^x + \sqrt{x}$. Skriv $\mathbf{v}$ som en linjärkombination av $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$.

5. För vilka värden på $a, b \in \mathbb{R}$ ligger linjen

$$L: \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ a \end{pmatrix} + t \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} b \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

i planet $x - y + 2z = 3$.

6. Ange en **enhetsvektor** som är ortogonal mot vektorerna

$$\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3 \quad \text{och} \quad 2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3.$$

7. Bestäm avståndet mellan planet $\Pi: x - y + 2z = 7$ och punkten $(7, 1, 1)$.
8. Låt L vara linjen genom $(2, -1, 3)$ med riktningsvektor $\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$. Vilken punkt på L ligger närmast punkten $(2, 1, 4)$.
9. Betrakta matriserna

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & a & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 6 \\ 6 & -2 & b \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestäm, om möjligt, talen a, b så att $B = A^{-1}$.

10. Linjen L har ekvationen $2x + y = 5$. Ange på **normalform** den normal till L som går genom punkten $(3, 2)$.
11. Ange, på **parameterform**, skärningslinjen L mellan planen $x + y - 3z = 1$ och $2x + y + z = 2$.
12. För vilka värden på $k \in \mathbb{R}$ är matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 1 & k & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

inte inverterbar.

13. Bestäm en ekvation på **normalform** till planet Π som innehåller punkterna $(1, 2, -1)$, $(2, 0, 1)$ och $(-1, 1, 2)$.
14. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 9 \\ 6 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Lös ekvationen $A^{-1}XB + A^{-1}X = A^{-1}C^t$.

(3 p) 15. Avgör för vilka värden på de reella talen a och b som ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + ay + z = 5 \\ x + 3ay - z = b \\ ax + 4y + 2z = -2 \end{cases}$$

har entydig lösning, ingen lösning eller oändligt många lösningar. Om det i något fall blir oändligt många lösningar skall dessa anges.

(3 p) 16. Betrakta underrummet

$$\mathbb{U} = [(-1, 2, 3, 0), (-1, 0, 2, 1), (-1, 6, 5, -2), (1, 4, 0, -3)] \subset \mathbb{R}^4.$$

Beskriv $\mathbb{U}$ med så få vektorer som möjligt. Avgör om vektorerna $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1, 1)$ och $\mathbf{v}_2 = (-2, 2, 5, 1)$ tillhör $\mathbb{U}$ eller inte.

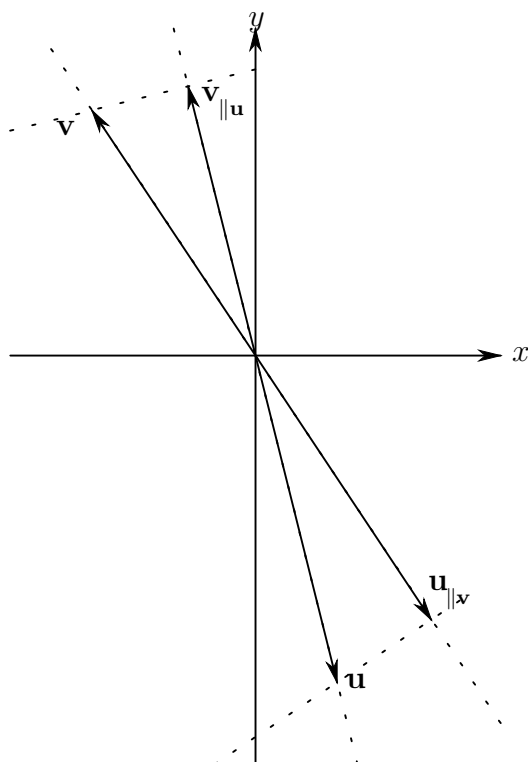
Lösningsförslag till TATA31. Linjär algebra, 2025–10–28

$$1. \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 4 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{array} \right), \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 7 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}$$

2. $B^t A$, $A^t B$ är inte definierade.

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 11 & -3 \\ 17 & -5 \end{pmatrix}, \quad BA^t = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

3.



4. $\mathbf{v} = 2\mathbf{u}_1 - 3\mathbf{u}_2$

5. $a = \frac{1}{2}, b = -8$

6. $\frac{1}{3}(-2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3)$ eller $-\frac{1}{3}(-2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3)$

7. $\frac{1}{\sqrt{6}}$

8. $(5/2, 0, 9/2)$

9. $a = 1, b = -4$

10. $-x + 2y = 1$

11. $L: \underline{e} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$

12. $k = \frac{5}{3}$

13. $4x + 7y + 5z = 13$

14. $X = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ -1 & 8 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

15. Skriv på matrisform

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 5 \\ 1 & 3a & -1 & b \\ a & 4 & 2 & -2 \end{array} \right),$$

och lös ekvationen “(determinanten av koefficientmatrisen A) = 0”.

$$\begin{aligned} \det A &= \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 5 \\ 1 & 3a & -1 & b \\ a & 4 & 2 & -2 \end{array} \right| \stackrel{r_3 - 2r_1}{=} \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 5 \\ 2 & 4a & 0 & b \\ a-2 & 4-2a & 0 & -2 \end{array} \right| = 1 \cdot (-1)^{1+3} \left| \begin{array}{cc|c} 2 & 4a & b \\ a-2 & 4-2a & -2 \end{array} \right| = \\ &= (a-2) \left| \begin{array}{cc|c} 2 & 4a & b \\ 1 & -2 & -2 \end{array} \right| = (a-2)(-4-4a) = -4(a-2)(a+1) = 0 \iff \\ &\iff a = 2, -1. \end{aligned}$$

Undantagsvärdena $a = 2$ och -1 kollas separat:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{a=2}}: & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 6 & -1 & b \\ 2 & 4 & 2 & -2 \end{array} \right) \stackrel{r_3 - 2r_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 6 & -1 & b \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{array} \right), \\ \underline{\underline{a=-1}}: & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & -1 & b \\ -1 & 4 & 2 & -2 \end{array} \right) \stackrel{r_2 - r_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & -2 & b-5 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \end{array} \right) \stackrel{r_3/3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & b-5 \end{array} \right) \stackrel{r_3 + 2r_2}{\sim} \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-3 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Detta ger

- entydig lösning för alla $b \in \mathbb{R}$ om $a \neq 2$ och $a \neq -1$ (determinantkriteriet),
- ingen lösning då $a = 2$ och $b \in \mathbb{R}$ eller då $a = -1$ och $b \neq 3$,
- oändligt många lösningar då $a = -1$ och $b = 3$. Ur ovanstående fås då

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 5 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+y-z = 5+1-t-t = 6-2t \\ 1-z = 1-t \\ t \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

16. Lös beroendeeckvationen och utse med ledning därav, löjlga element. Enligt Satsen om löjlga element, sats 5.3.16, sid 111 kan dessa strykas ur definitionen av höljet utan att höljet ändras. Kalla de genererande vektorerna $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$.

$$\begin{aligned} \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \lambda_3 \mathbf{u}_3 + \lambda_4 \mathbf{u}_4 = \dots = \mathbf{e} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 6 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \mathbf{0} &\iff \\ \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 2 & 0 & 6 & 4 & | & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1]{\substack{r_2+2r_1 \\ r_3+3r_1 \\ -r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 6 & | & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 \leftrightarrow r_2]{\substack{r_2+2r_4 \\ r_3+r_4}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 = -2s - 3t - s + t = -3s - 2t \\ 2\lambda_3 + 3\lambda_4 = 2s + 3t \\ s \\ t \end{pmatrix} = \\ = s \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Låt $s = 1, t = 0$ och sätt in den lösning till beroendeeckvationen som detta ger i beroendeeckvationen. Vi får då

$$-3\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 = \mathbf{0} \iff \mathbf{u}_3 = 3\mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2.$$

På samma sätt ger $s = 0, t = 1$ att

$$-2\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_4 = \mathbf{0} \iff \mathbf{u}_4 = 2\mathbf{u}_1 - 3\mathbf{u}_2.$$

Därmed har både $\mathbf{u}_3$ och $\mathbf{u}_4$ uttryckts som linjärkombinationer av $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$, d.v.s. $\mathbf{u}_3 = (-1, 6, 5, -2)$ och $\mathbf{u}_4 = (1, 4, 0, -3)$ kan utses till löjlga element. Satsen om löjlga element, sats 5.3.16, sid 111 ger då att

$$\mathbb{U} = [(-1, 2, 3, 0), (-1, 0, 2, 1), (-1, 6, 5, -2), (1, 4, 0, -3)] = [(-1, 2, 3, 0), (-1, 0, 2, 1)]$$

Återstår två genererande vektorer. Om de är linjärt beroende måste de vara parallella. Eftersom $(-1, 2, 3, 0)$ och $(-1, 0, 2, 1)$ inte är parallella är de linjärt oberoende och

därmed finns inga fler löjliga element eftersom existens av löjligt element är ekvivalent med linjärt beroende enligt sats 5.4.4, sid 114.

Slutligen för att kolla om $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ tillhör $\mathbb{U}$ eller inte bildar vi en linjärkombination av $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$ och sätter lika med $\mathbf{v}_1$ respektive $\mathbf{v}_2$,

$$\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_1, \quad \mathbf{v}_2.$$

Vi behandlar båda ekvationerna samtidigt. Uppställningen blir precis som i inledningen fast utan $\mathbf{u}_3$ och $\mathbf{u}_4$ och med koordinaterna för $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ i högerledet istället för $\mathbf{0}$. Vi får (observera att vi gör exakt samma radoperationer som i inledningen)

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\sim]{\substack{r_2+2r_1 \\ r_3+3r_1 \\ -r_1}} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\sim]{\substack{r_2+2r_4 \\ r_3+r_4 \\ r_4 \leftrightarrow r_2}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{array} \right).$$

Ur detta ser vi att ekvationen $\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_1$ inte är lösbar och att $\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2$ är lösbar, d.v.s. $\mathbf{v}_1$ tillhör inte $\mathbb{U}$ och $\mathbf{v}_2$ tillhör $\mathbb{U}$.