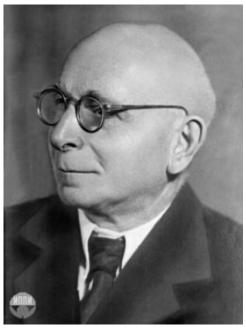
TATA32-ETE373: Inlämninguppgifter 2025, Del 1

Lämnas in senast 16/10 2025, kl.13.00

Paul de Casteljau

Pierre Bézier



Sergei N. Bernstein

I bilderna ovan ser vi Paul de Casteljau (matematiker som arbetade för Citroën), Pierre Bézier (ingenjör -och doktor i geometri- på Renault) och Sergei N. Bernstein (professor i matematik vid Kharkiv universitet). de Casteljau och Bézier grundade CAD och grafisk design. Bernstein är analytikern som gav dem de matematiska verktygen genom att bevisa Weierstrass Approximationssats med -med Bensteins ord- sannolikhetslära á la Pascal.

Så, vi börjar med Pascals binomialkoefficienter: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $0 \leq k \leq n$. Med egenskaper:

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$.

2. **Binomialsatsen**: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \binom{n}{0} y^n + \binom{n}{1} x y^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-1} x^{n-1} y + \binom{n}{n} x^n$

3. **Rekursion**: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, 1 \leq k \leq n-1$; $\binom{n}{0} = \binom{n-1}{0}$; $\binom{n}{n} = \binom{n-1}{n-1}$.

Vi fortsätter som Bernstein gjorde och för att approximera en kontinuerlig reell funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ så noga som vi vill med ett polynom (av lämpligt gradtal n) betraktar vi de $n+1$ Bernsteins polynom av gradtal n:

$$B_{k,n}(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}; 0 \leq k \leq n,\ t \in [0,1]$$

($t \in [0,1]$ för att sannolikheter varierar mellan 0 och 1).

För $k < 0$ eller $k > n$ har vi $B_{k,n}(t) = 0, t \in [0,1]$ (konstant funktion 0).

Bernsteins polygon av gradtal n bildar en bas för $P_{\leq n} = \{\text{polynom av gradtal högst } n\}$.

Bernsteins polynom ärver alla goda egenskaper hos binomialkoefficienter:

Fråga 1 Ange Bernsteins polynom $B_{k,n}(t)$ för gradtalen $n = 1, 2, 3$ (3 fall). Visa att varje polynom $p(t) = a + bt + ct^2, a, b, c \in \mathbb{R}, t \in [0,1]$, av gradtal högst 2 kan skrivas som $p(t) = a_1 B_{0,2}(t) + a_2 B_{1,2}(t) + a_3 B_{2,2}(t)$ (du måste hitta a_1, a_2, a_3 beroende på a, b, c).

Fråga 2 Visa att för varje $t \in [0,1]$; $B_{k,n}(t) \geq 0$.

Fråga 3 (Totala sannolikheten) Givet ett gradtal n, visa att $\sum_{k=0}^{n} B_{k,n}(t) = 1$ gäller för varje $t \in [0,1]$.

Fråga 4 Givet ett gradtal n, visa att $B_{n-k,n}(t) = B_{k,n}(1-t)$ gäller för varje $t \in [0,1]$ (Tips: tänk på att byta räknare $j = n - k$).

Fråga 5 (Rekursivt beteende) Visa att:

a) $B_{0,n}(t) = (1-t)B_{0,n-1}(t); \quad B_{n,n}(t) = (t)B_{n-1,n-1}(t)$

b) $B_{k,n}(t) = (1-t)B_{k,n-1}(t) + (t)B_{k-1,n-1}(t)$, $1 \leq \mathsf{k} \leq n-1$.

Genom att använda sådana egenskaper kunde de Casteljau ge en enkel **rekursiv algoritm** (de Casteljaus algoritm) för att beräkna fram värdet $p_n(t_0)$ som polynomet p_n av gradtal n antar i punkten $t_0 \in [0,1]$.

Vi kan tänka inte bara i en dimension utan i flera dimensioner samtidigt genom att använda vektor-avbildningar $\mathbf{x} : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ där $\mathbf{x}(t) = (p^1(t), p^2(t), p^3(t))$, med p^1, p^2 och p^3 polynom av gradtal högst n. Nu ska vi ta $n = 2$, dvs vi har en kvadratisk approximation. Vi kan skriva varje polynom som en linjärkombination av Bernsteins polynom av grad 2:

$$p^1 = b_0^1 B_{0,2} + b_1^1 B_{1,2} + b_2^1 B_{2,2}, p^2 = b_0^2 B_{0,2} + b_1^2 B_{1,2} + b_2^2 B_{2,2}, p^3 = b_0^3 B_{0,2} + b_1^2 B_{1,2} + b_2^3 B_{2,2}.$$

Nu grupperar vi koefficienterna i vektorer (punkter i 3D) $\mathbf{b}_0 = (b_0^1, b_0^2, b_0^3)$, $\mathbf{b}_1 = (b_1^1, b_1^2, b_1^3)$, $\mathbf{b}_2 = (b_2^1, b_2^2, b_2^3)$. Punkterna $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ kallas kontroll-punkterna. Vi kan nu skriva:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{b}_0 B_{0,2}(t) + \mathbf{b}_1 B_{1,2}(t) + \mathbf{b}_2 B_{2,2}(t),\ t \in [0,1].$$

Observera att $\mathbf{x}(0) = \mathbf{b}_0$ och $\mathbf{x}(1) = \mathbf{b}_2$.

Notera att $\mathbf{x}$ är en kurva: en (kvadratisk) Bézier-kurva, som har ärvt alla goda egenskaper hos binomialkoefficienter. de Casteljaus algoritm ger oss ett sätt att enkelt implementera en (rekursiv) algoritm i datorn som renderar kurvan (datorn ritar kurvan).

Fråga 6. Ange den kvadratiska Bézier-kurvan med kontroll-punkter $\mathbf{b}_0 = (Y_1, Y_2, 1)$, $\mathbf{b}_1 = (D_1, D_2, 0.5)$, $\mathbf{b}_2 = (M_1, M_2, -0.5)$.

$D_1, D_2 - -M_1, M_2 - -Y_1, Y_2$ är parametrar tagna från din födelsedag: t.ex om någon är född 9-Dec-1987 har parametrar $D_1 = 0, D_2 = 9, M_1 = 1, M_2 = 2, Y_1 = 8, Y_2 = 7$; någon född 12-Sept-2002 har parametrar $D_1 = 1, D_2 = 2, M_1 = 0, M_2 = 9, Y_1 = 8, Y_2 = 2$.