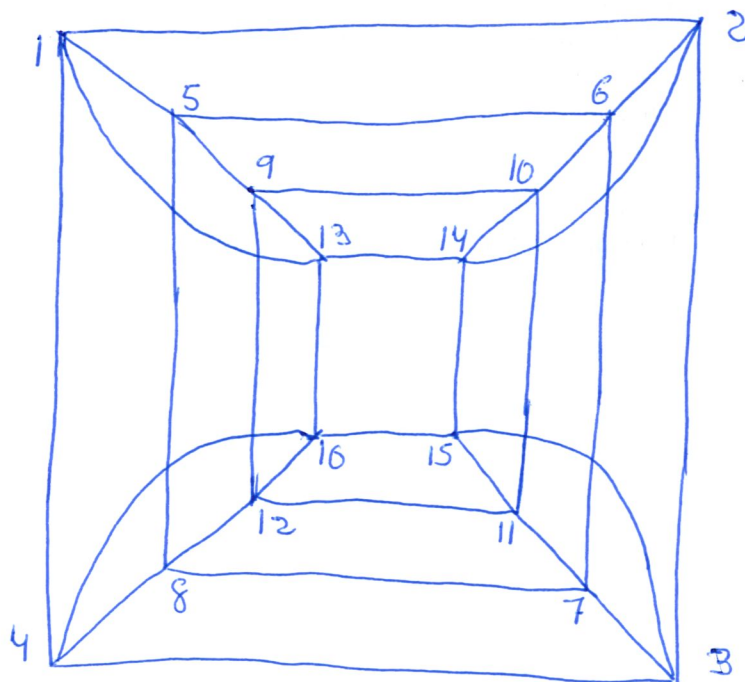


Provtenta i diskret matematik TATA32.

Inga hjälpmedel. Ej räknedosa. Fullständiga motiveringar krävs.

För betyg 3 behövs 20 poäng, för betyg 4, 26 poäng och 32 poäng för betyg 5.

1. Formulera Binomial- och multinomialsatsen och bevisa en av dem.
2. Visa med induktionsprincipen att $(1 - \frac{1}{4})(1 - \frac{1}{9}) \dots (1 - \frac{1}{n^2}) = \frac{n+1}{2n}$ för alla $n \geq 2$.
3. (a) Är grafen nedan en hamiltongraf? En eulergraf? I så fall ange en hamiltoncykel och en sluten eulerväg. (3p)
(b) Bestäm grafens kromatiska tal. Är grafen bipartit? (2p)
4. Betrakta femsiffriga tal, sådana där ingen siffra förekommer mer än en gång
 - (a) Hur många sådana tal har som första siffra 1:a och slutar med 23 eller 32? (1p)
 - (b) Hur många sådana tal har som första siffra en 1:a och är en multipel av fyra? (ett tal t är en multipel av fyra om och endast om dess två sista siffror bildar en multipel av fyra). (3p)
 - (c) Hur många sådana tal har som första siffra 1:a och slutar inte med 23 eller 32? (1p)
5. (a) Visa att $1^{12} + 2^{12} + 3^{12} + 4^{12} + 5^{12} + 6^{12} \equiv 6 \pmod{7}$ (3p)
(b) Två primtal p och q kallas *tvillingar* om $q = p + 2$; t.ex. $p = 11$ och $q = 13$. Visa att medelvärdet av två tvilling-primtal aldrig är ett primtal (2p)
6. Lös den rekursiva ekvationen $a_n - 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 4$, $n \geq 2$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$.
7. Beräkna antalet permutationer av 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 och 9 som uppfyller att inget av 1, 5 eller 9 är fixerat.
8. Betrakta mängden A av alla personer bosatta i Sverige med personnummer. Vi definierar en relation $\mathcal{R}$ på A genom $P_1 \mathcal{R} P_2$ om personnummer för P_1 är mindre eller lika med personnummer för P_2
 - (a) Visa att $\mathcal{R}$ är en partialordning. (3p)
 - (b) Givet två personer P_1, P_2 , bestäm $\text{sub}(P_1, P_2)$ och $\text{möb}(P_1, P_2)$. (1p)
 - (c) Visa att $(A, \mathcal{R})$ är ett lattice. (1p)



Svar. Observera att nedan finns svar, inte lösningar

1. För binomial-och multinomialsatsen se Satser 5.7.1 och 5.9.1 i boken
2. Se boken.

3. Grafen är hamiltonsk med en hamiltoncykel:

$$1 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 5 \rightarrow 9 \rightarrow 12 \rightarrow 11 \rightarrow 10 \rightarrow 14 \rightarrow 15 \rightarrow 16 \rightarrow 13 \rightarrow 1$$

Grafen är 4-reguljär, dvs $d(v)=4$ för varje nod, och är en eulergraf.

En bipartition av grafen är: $X = \{1, 3, 6, 8, 9, 11, 14, 16\}$, $Y = \{2, 4, 5, 7, 10, 12, 13, 15\}$ och eftersom grafen biartit är kromatiska talet 2.

4. Betrakta femsiffriga tal, sådana där ingen siffra förekommer mer än en gång

- (a) Hur många sådana tal har som första siffra 1:a och slutar med 23 eller 32? Svar $84 = 2 \times 7 \times 6$
- (b) Hur många sådana tal har som första siffra en 1:a och är en multipel av fyra? Svar $840 = 20 \times 7 \times 6$
- (c) Hur många sådana tal har som första siffra 1:a och slutar inte med 23 eller 32? Svar (genom att använda (a)-delen): $2940 = 9 \times 8 \times 7 \times 6 - 84 = 42(72 - 2)$

5. (a) Fermats lilla sats säger oss att $1^6 \equiv 2^6 \equiv 3^6 \equiv 4^6 \equiv 5^6 \equiv 6^6 \equiv 1 \pmod{7}$ så $1^{12} + 2^{12} + 3^{12} + 4^{12} + 5^{12} + 6^{12} \equiv 6 \pmod{7}$
- (b) Två primtal p och q kallas *tvillingar* om $q = p + 2$; t.ex. $p = 11$ och $q = 13$. Medelvärde av p och q är $(p + q)/2 = p + 1$. Eftersom $q \neq 4$ kan p inte vara primtalet 2 och p är ett udda primtal och $p + 1$ är ett jämnt tal större än 2 och aldrig primtal.

6. Lös den rekursiva ekvationen $a_n - 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 4$, $n \geq 2$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$. Karakteristiska ekvationen är $r^2 - 6r + 9 = 0$ med dubbelrot $r = 3$. Lösning till homogendelen är $a_n^{(h)} = (An + B)(3)^n$. Högerledet är $4(1)^n$, med 1 som inte är en rot till karakteristiska ekvationen $r^2 - 6r + 9 = 0$. En partikulär lösning är $a_n^{(p)} = C$, där C uppfyller $C - 6C + 9C = 4$ och $C = 1$. Då är $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = 1 + (An + B)(3)^n$ och

$$a_0 = 1 = 1 + B, \quad a_1 = 2 = 1 + 3A + 3B; \quad B = 0, A = 1/3$$

$$\text{Svar: } a_n = 1 + n(3)^{n-1}$$

7. Vi letar efter antalet permutationer av 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 och 9 som ligger i komplementet till permutationer som fixerar minst en av siffrorna 1, 5 eller 9. Det finns $8!$ permutationer som fixerar 1, $8!$ som fixerar 5 och $8!$ som fixerar 9. Det finns $7!$ permutationer som fixerar 1 och 5, $7!$ permutationer som fixerar 1 och 9, och $7!$ permutationer som fixerar 5 och 9. Slutligen finns det $6!$ permutationer som fixerar 1, 5 och 9. Totalt finns det $9! - 3 \times 8! + 3 \times 7! - 6!$ permutationer som inte fixerar någon av 1, 5 eller 9.
8. Betrakta mängden A av alla personer bosatta i Sverige med personnummer. Vi definierar en relation $\mathcal{R}$ på A genom $P_1 \mathcal{R} P_2$ om personnummer för P_1 är mindre eller lika med personnummer för P_2
 - (a) Visa att relationen är reflexiv, antisymmetrisk och transitiv.
 - (b) Givet två personer P_1, P_2 ; $\text{sub}(P_1, P_2)$ är personen med minsta personnummer och $\text{m6b}(P_1, P_2)$ är personen med största personnummer.
 - (c) (b)-delen visar att $(A, \mathcal{R})$ är ett lattice.