LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Milagros Izquierdo

Tentamen i Diskret Matematik, TATA32 (916G24), ETE373 TEN1, 2023–03–17, kl 08–13.

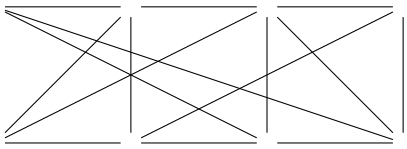
Inga hjälpmedel. Ej räknedosa. Fullständiga motiveringar krävs.

För betyg 3 behövs 20 poäng, för betyg 4, 26 poäng och 32 poäng för betyg 5, inklusive eventuella bonuspoäng.

---

1. Betrakta följden av fibonaccital som definieras av $F_0 = 1, F_1 = 1, F_m = F_{m-1} + F_{m-2}, m \geq 2$. Visa med induktionsprincipen att $F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n} - 1$, för alla $n \geq 1$. (5p)

2. Studera om grafen G nedan är Hamiltonsk, Eulersk, planär och bipartit. Ange kromatiska talet till grafen. Varje fråga ger 1p.



3. (a) Hur många binära följder med 20 1:or och 17 0:or finns det med villkoret att det INTE finns två konsekutiva 0:or? (3p)
   (b) Hur många Upp-och-Höger vägar med 20 upp-steg och 25 höger-steg finns det med villkoret att det INTE finns två konsekutiva upp-steg? (1p)
   (c) På hur många sätt kan vi fördela 20 identiska bollar i 7 lådor? (1p)

4. Dynamiken för två populationer av bakterier ges av systemet av rekursiva ekvationer (hur antalet bakterier ändrar sig från en mätning till nästa):

$$\begin{cases} a_{n+1} = 0.6a_n + 0.5b_n \\ b_{n+1} = -0.16a_n + 1.2b_n \end{cases} \quad n \geq 0, \quad \text{med} \quad a_0 = a, \quad b_0 = b \text{ där } a < \frac{5b}{2}.$$

   (a) Ange andragradsekvationer (eller karakteristiska ekv.) för a_n och b_n (2p)
   (b) Ange explicita formler för a_n och b_n beroende på a och b (2p)
   (c) Vad går a_n mot när $n \to \infty$? (1p)

5. **(a)** Ange heltalet mellan 5000 och 6000 som är kongruent med $19^{9876541}$ modulus 1001. (3p)

   (b) Ange alla par av **negativa** heltal a och b som uppfyller den diofantiska ekvationen $34a^2 + 51b^2 = 1360$. (2p)

6. Bestäm sannolikheten att när man permuterar siffrorna 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 och 9 så hamnar ingen av siffrorna 1, 3, 7 och 9 på sin plats. (5p)

7. Betrakta mängden $B = \{(i,j) \in A^2;\ A = \{1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100\}\}$. Vi definierar på B en relation $\mathcal{R}$ genom $(x,y)\mathcal{R}(x',y')$ om x är en multipel till x' och y är en multipel till y'.
   (a) Visa att $\mathcal{R}$ är en partialordning. (3p)
   (b) Visa att $(B, \mathcal{R})$ är en lattice. (1p)
   (c) Ange minsta och största element i $(B, \mathcal{R})$. (1p)

8. Formulera och bevisa satsen: Ekvivalens av existens av ekvivalensrelation och partition på en mängd A (De nödvändiga begreppen som används i satsen ska definieras). (5p)

Diskret Matematik
TATA32, ETE373 (916G24), TEN1
Lösningsförslag

Filip Granlund och Milagros Izquierdo

2023-03-17

Uppgift 1 Fibonacciföljden, $\{f_i\}$, definieras enligt:

$$f_1 = f_2 = 1,\ f_{n+2} = f_n + f_{n+1}, \quad n \geq 1. \tag{1}$$

Vi ska bevisa ekvationen:

$$f_1 + f_3 + \cdots + f_{2n-1} = f_{2n} - 1, \quad \forall n \geq 1. \tag{2}$$

- *Basfall* ($n = 1$):

  Vi börjar med att kontrollera ekvationen för $n = 1$:

  $$VL_1 = f_1 = 1 = 2 - 1 = f_2 - 1 = HL_1 \quad \checkmark$$

  Här är VL_1 och HL_1 vänster- respektive högerled i (2) för $n = 1$.

- Nu antar vi att ekvationen (2) gäller för något $p \geq 1$, dvs.

  $$f_1 + f_3 + \cdots + f_{2p-1} = f_{2p} - 1.$$

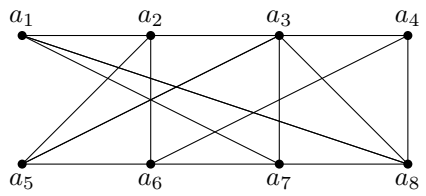
  Vi ska bevisa att ekvationen även gäller för $n = p + 1$:

  $$\begin{aligned} VL_{p+1} &= (f_1 + f_3 + \cdots + f_{2p-1}) + f_{2p+1} \\ &= (f_{2p} - 1) + f_{2p+1} \\ &= (f_{2p} + f_{2p+1}) - 1 \\ &= f_{2(p+1)} - 1 \\ &= HL_{p+1} \quad \checkmark \end{aligned}$$

  där andra raden följer från vårt antagande i (2) och fjärde raden följer från definitionen av Fibonaccitalen i (1).

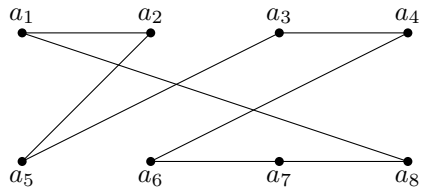
Uppgift 2

I Figur 1 visas grafen G.



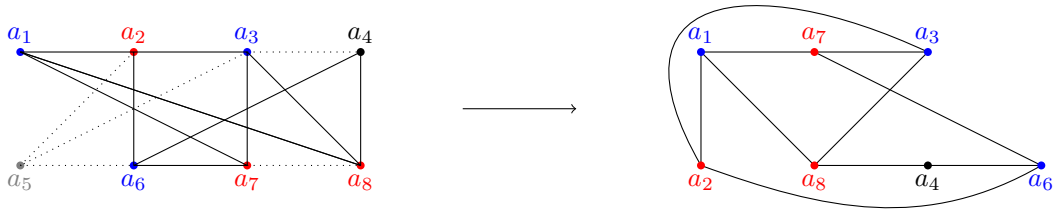
Figur 1: Detta är grafen G.

- (Hamiltonsk): Ja, vilket illustreras i Figur 2.



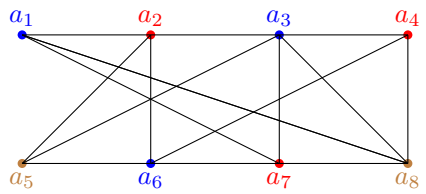
Figur 2: $a_1 - a_2 - a_5 - a_3 - a_4 - a_6 - a_7 - a_8 - a_1$ är en Hamiltoncykel.

- (Eulersk): Nej, eftersom t.ex. $\deg(a_5) = 3$ (vilket är udda) i Figur 1.
- (Planär): Nej, eftersom delgrafen i Figur 3 är homeomorf med $K_{3,3}$.



Figur 3: Här illustreras en delgraf till G som är homeomorf med $K_{3,3}$.

- (Bipartit): Nej, det finns udda cykler i Figur 1, t.ex. $a_3 - a_7 - a_8 - a_3$.
- (Kromatiskt tal): $\chi(G) = 3$. Grafen är ej bipartit så $\chi(G) \geq 3$. Vi testar därför 3 färger och ser att det fungerar, vilket visas i Figur 4.



Figur 4: Grafen G kan färgas med 3 färger.

Uppgift 3

a) Det enda vi behöver tänka på är hur vi kan placera in 0:or i en följd av 20 stycken 1:or. Eftersom inga 0:or är konsekutiva har vi $20 + 17 - 16 = 21$ platser att placera in 0:or på. Det finns alltså $\binom{21}{17}$ binära följder med det givna villkoret.

b) På samma sätt finns det

$$\binom{25 + 20 - 19}{20} = \binom{26}{20} = 230230$$

vägar.

c) Vi räknar kombinationer med upprepningar, alltså

$$\binom{20 + 7 - 1}{7 - 1} = \binom{26}{6} = \binom{26}{20} = 230230.$$

Uppgift 4

a) Givet är

$$\begin{cases} a_{n+1} = & 0,6a_n + 0,5b_n \\ b_{n+1} = & -0,16a_n + 1,2b_n \end{cases} \tag{3}$$

med bivillkoren $n \geq 0$, med $a_0 = a$, $b_0 = b$ och $a < \frac{5b}{2}$.

Från första raden i (3) får vi

$$\begin{cases} b_n = 2a_{n+1} - \dfrac{6}{5}a_n \\ b_{n+1} = 2a_{n+2} - \dfrac{6}{5}a_{n+1} \end{cases},$$

vilket vi kan sätta in i andra raden i (3) för att få

$$a_{n+2} - \frac{9}{5}a_{n+1} + \frac{4}{5}a_n = 0,$$

med karaktäristisk ekvation

$$r^2 - \frac{9}{5}r + \frac{4}{5} = 0. \tag{4}$$

På samma sätt får vi ekvationerna för b_{n+2}, vilka har exakt samma form.

b) Ekvation (4) har lösningarna $r_1 = 1$ och $r_2 = \frac{4}{5}$. Därför blir de allmänna lösningarna

$$\begin{cases} a_n = A_1 + A_2\left(\dfrac{4}{5}\right)^n \\ b_n = B_1 + B_2\left(\dfrac{4}{5}\right)^n \end{cases}. \tag{5}$$

Med bivillkoren får vi från (3) och (5) att

$$\begin{cases} a_0 = a = A_1 + A_2 \\ a_1 = A_1 + \dfrac{4}{5}A_2 = \dfrac{3a}{5} + \dfrac{b}{2} \end{cases} \quad \text{och} \quad \begin{cases} b_0 = b = B_1 + B_2 \\ b_1 = B_1 + \dfrac{4}{5}B_2 = \dfrac{-4a}{25} + \dfrac{6b}{5} \end{cases}.$$

Genom att lösa ut A_1, A_2, B_1, och B_2 får vi slutligen att

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{5b-2a}{2} + \dfrac{4a-5b}{2}\left(\dfrac{4}{5}\right)^n \\ b_n = \dfrac{10b-4a}{5} + \dfrac{4a-5b}{5}\left(\dfrac{4}{5}\right)^n \end{cases}.$$

c) Då $\left(\frac{4}{5}\right)^n \longrightarrow 0$ när $n \longrightarrow \infty$ så kommer

$$a_n \longrightarrow \frac{5b-2a}{2} > 0.$$

Uppgift 5

a) Först är $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ och

$$\begin{cases} b_1 \equiv 19^{9876541} & \equiv 5^{9876541} \equiv 1^{1646090} \cdot 5 \equiv 5 \mod 7 \\ b_2 \equiv 19^{9876541} & \equiv 8^{9876541} \equiv 1^{987654} \cdot 8 \equiv 8 \mod 11 \\ b_3 \equiv 19^{9876541} & \equiv 6^{9876541} \equiv 1^{823045} \cdot 6 \equiv 6 \mod 13 \end{cases}.$$

Med Kinesiska restsatsen finner vi nu att

$$\begin{aligned} x &\equiv 5 \cdot 143 \cdot a_1 + 8 \cdot 91 \cdot a_2 + 16 \cdot 77 \cdot a_3 && \mod 1001 \\ &\equiv 5 \cdot 143 \cdot 5 + 8 \cdot 91 \cdot 4 + 16 \cdot 77 \cdot (-1) && \mod 1001 \\ &\equiv 6025 && \mod 1001 \\ &\equiv 5024 && \mod 1001 \end{aligned},$$

eftersom

$$\begin{cases} 143 \cdot 5 & \equiv 1 \mod 7 \\ 91 \cdot 4 & \equiv 1 \mod 11 \\ 77 \cdot (-1) & \equiv 1 \mod 13 \end{cases}.$$

b) *Alternativ 1*

Vi börjar med att sätta $a^2 = A$ och $b^2 = B$, där A och B båda är positiva, och detta ger oss den linjära diofantiska ekvationen:

$$34A + 51B = 1360 \quad \Longleftrightarrow \quad 2A + 3B = 80. \tag{6}$$

Nu är $\text{sgd}(34, 51) = 17$ och $17 \mid 1360 = 17 \cdot 80$. Eftersom

$$17 = 2 \cdot 34 + (-1) \cdot 51,$$

så är en lösning till (6): $A_0 = 2 \cdot 80 = 160$ och $B_0 = (-1) \cdot 80 = -80$.

Den allmänna lösningen till $2A + 3B = 0$ är $A = -3n$ och $B = 2n$, $n \in \mathbb{Z}$. Alla lösningar kommer då ges av

$$\begin{cases} A = 160 - 3n & > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad b \leq 53 \\ B = -80 + 2n & > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad n \geq 41 \end{cases}.$$

Alla möjliga svar blir då

$$\begin{aligned} (A,\, B) = &(37,\, 2),\, (34,\, 4),\, (31,\, 6),\, (28,\, 8), \\ &(25,\, 10),\, (22,\, 12),\, (19,\, 14),\, (16,\, 16), \\ &(13,\, 18),\, (10,\, 20),\, (7,\, 22),\, (4,\, 24),\, (1,\, 26). \end{aligned}$$

Eftersom A och B är kvadrater måste $A = B = 16$, så att $a = b = -4$.

Alternativ 2

Vi gör samma variabelbyte igen och får ekvation (6).

Eftersom både $2A$ och HL är jämna måste $3B$ också vara jämnt. För att uppfylla detta krav måste B vara en *jämn kvadrat*. Eftersom

$$3B = 80 - 2A \leq 80 - 2 = 78,$$

måste även $B \leq 16$. Så det finns två möjliga fall: $B = 4$ och $B = 16$.

För $B = 4$ får vi $A = 34$, vilket inte är möjligt, men för $B = 16$ får vi:

$$2A + 3 \cdot 16 = 80 \quad \Longleftrightarrow \quad A = 16.$$

Nu blir a ett heltal, och vi har lösningen $a = b = -4 < 0$.

Uppgift 6

Totalt antal permutationer är 9!.

Låt

$$\begin{cases} A_1 = \{\text{permutationer där 1 är fixerad}\} \\ A_2 = \{\text{permutationer där 3 är fixerad}\} \\ A_3 = \{\text{permutationer där 7 är fixerad}\} \\ A_4 = \{\text{permutationer där 9 är fixerad}\} \end{cases}.$$

Då är antalet permutationer där varken 1, 3, ~~5~~ 7 eller 9 är fixerad

$$|\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4}| = 9! - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|.$$

Med PIE får vi

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = 4 \cdot 8! - 6 \cdot 7! + 4 \cdot 6! - 5!,$$

eftersom

$$\begin{cases} |A_i| = 8!, & 1 \leq i \leq 4 \\ |A_i \cap A_j| = 7!, & 1 \leq i < j \leq 4 \\ |A_i \cap A_j \cap A_k| = 6!, & 1 \leq i < j < k \leq 4 \\ |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 5! \end{cases}.$$

Så sannolikheten blir

$$\begin{aligned} S_{1,3,7,9} &= \frac{1}{9!}(9! - 4 \cdot 8! + 6 \cdot 7! - 4 \cdot 6! + 5!) \\ &= 1 - \frac{4}{9} + \frac{1}{12} - \frac{1}{126} + \frac{1}{3024} \\ &= \frac{1909}{3024} \end{aligned}$$

Uppgift 7

a) För att visa att $\mathcal{R}$ är en partialordning visar vi följande:

i) Reflexivitet av $\mathcal{R}$: För att visa att $\mathcal{R}$ är reflexiv behöver vi visa att för varje (x, y) i B gäller att $(x,\, y)\, \mathcal{R}\, (x,\, y)$. Detta är sant eftersom $x \mid x$ och $y \mid y$.

ii) Antisymmetri av $\mathcal{R}$: För att visa att $\mathcal{R}$ är antisymmetrisk behöver vi visa att om $(x,\, y)\, \mathcal{R}\, (x',\, y')$ och $(x',\, y')\, \mathcal{R}\, (x,\, y)$, så kommer $(x,\, y) = (x',\, y')$. Detta är sant eftersom $x' \mid x$ och $y' \mid y$ samt $x \mid x'$ och $y \mid y'$, medför att $x = x'$ och $y = y'$ eftersom x, x', y och y' är positiva.

iii) Transitivitet av $\mathcal{R}$: För att visa att $\mathcal{R}$ är transitiv behöver vi visa att om $(x,\, y)\, \mathcal{R}\, (x',\, y')$ och $(x',\, y')\, \mathcal{R}\, (x'',\, y'')$, så kommer $(x,\, y)\, \mathcal{R}\, (x'',\, y'')$. Detta är sant eftersom $x'' \mid x'$ och $x' \mid x$ samt $y'' \mid y'$ och $y' \mid y$ medför att $x'' \mid x$ och $y'' \mid y$. Alltså gäller att $(x,\, y)\, \mathcal{R}\, (x'',\, y'')$.

b) $(B, \mathcal{R})$ är en lattice eftersom givet $\mathcal{C} = \{(x,\, y),\, (x',\, y')\}$ är

$$\begin{cases} \text{möb}(\mathcal{C}) = (\text{sgd}(x,\, x'),\ \text{sgd}(y,\, y')) \\ \text{sub}(\mathcal{C}) = (\text{mgm}(x,\, x'),\, \text{mgm}(y,\, y')) \end{cases}.$$

c) Minsta element är $(100, 100)$ och största element är $(1, 1)$.