LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Milagros Izquierdo

**Tentamen i Diskret Matematik, TATA32 (916G24), TEN1, 2022–01–15, kl 08–13.**

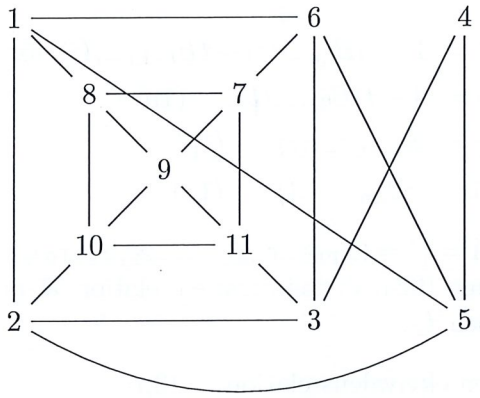
**Inga hjälpmedel. Ej räknedosa. Fullständiga motiveringar krävs.**

För betyg 3 behövs 20 poäng, för betyg 4, 26 poäng och 32 poäng för betyg 5, inklusive eventuella bonuspoäng.

---

1. Visa med Induktionsprincipen att för alla naturliga tal $n \geq 0$ gäller att $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$ är en multipel av 9. (5p)

2. Studera om grafen $G$ nedan är Hamiltonsk, Eulersk, planär och bipartit. Ange kromatiska talet till grafen. Varje fråga ger 1p.




3. Betrakta talen -6, -5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5 och 6.

   På hur många sätt kan man välja (högst en gång varje tal) sex av talen så att produkten av de valda talen blir positiv? (5p)

4. (a) Lös den diofantiska andragradsekvationen $4x^2 + 12xy + 9y^2 = 49$. (Observera att vänsterledet är en kvadrat). (3p)

   (b) Bestäm heltalen $n$ som uppfyller att $7n - 6$ är en multipel av 9 och samtidigt $5n + 9$ är en multipel av 11. (2p)

5. Betrakta systemet av rekursiva ekvationer

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + b_n + (n+1) \\ b_{n+1} = -a_n + 4b_n - n \end{cases} \quad n \geq 0, \quad med \quad a_0 = 1, \quad b_0 = 2.$$

   (a) Ange rekursiva andragradsekvationer med begynnelsevillkor för $a_n$ och $b_n$ (2p)

   (b) Ange explicita formler för $a_n$ och $b_n$ (3p)

**VÄND**

LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Milagros Izquierdo

**Tentamen i Diskret Matematik, TATA32 (916G24), TEN1, 2021–01–16, kl 08–13.**

**Inga hjälpmedel. Ej räknedosa. Fullständiga motiveringar krävs.**

För betyg 3 behövs 20 poäng, för betyg 4, 26 poäng och 32 poäng för betyg 5, inklusive eventuella bonuspoäng.

---

6. Betrakta en variabel $t$, $0 \leq t \leq 1$ och de så kallade **Bernstein polynomen** med gradtal $n$ (det finns $n+1$ av dem) som definieras av $B_{i,n}(t) = \binom{n}{i}(1-t)^{n-i}(t)^i$, $0 \leq i \leq n$.

   (a) Visa att, givet $t$, $0 \leq t \leq 1$, $\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t) = 1$. (1p)

   (b) Visa att $B_{i,n}(t) = (1-t)B_{i,n-1}(t) + tB_{i-1,n-1}(t)$ för $1 \leq i \leq n-1$ (1p)

   (c) Visa att $B_{0,n}(t) = (1-t)B_{0,n-1}(t)$. (1p)

   (d) Visa att $B_{n,n}(t) = tB_{n-1,n-1}(t)$. (1p)

   (e) Visa att $B_{n-i,n}(t) = B_{i,n}(1-t)$. (1p)

7. Betrakta mängden $A = \{l = (x_{1023}, x_{1022}, \ldots, x_2, x_1, x_0);\ x_i = 0, 1,\ 0 \leq i \leq 1023\}$ bestående av binära listor av längd 1024. Vi definierar en relation $\mathcal{R}$ på $A$ genom: $l_1 \mathcal{R} l_2$ om $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4$ och $x_5$ är lika i $l_1$ och $l_2$.

   (a) Visa att $\mathcal{R}$ är en ekvivalensrelation. (3p)

   (b) Hur många ekvivalensklasser finns det? (1p)

   (c) Hur många binära listor innehåller varje ekvivalensklass? (1p)

8. Formulera Binomialsatsen och Multinomialsatsen och bevisa en av dem. (5p)

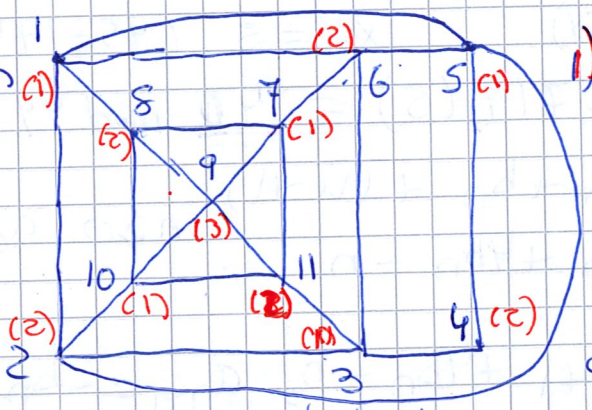
Svar TATA32 Diskret matematik 15/1 2022

1) Visa med PI att $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$ är multipel av 9, $\forall n \geq 0$

i) Vi kontrollerar att påståndet är sant för $n=0$
$0^3+1^3+2^3 = 1+8 = 9 = 1\cdot 9$. Sant

ii) Vi antar att för något $n>0$ $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3 = 9k$
Och studerar $(n+1)^3+(n+2)^3+(n+3)^3$. Från antagandet
$(n+1)^3+(n+2)^3+(n+3)^3 = 9k - n^3 + (n+3)^3$. Med
Binomialsatsen $(n+3)^3 = n^3+(3)(3)n^2+(3)(9)n+(27)$
Så $(n+1)^3+(n+2)^3+(n+3)^3 = 9k - n^3 + n^3 + 9(n^2+3n+3) =$
$= 9(k+n^2+3n+3)$ V.S.V

2) Grafen




1) Är planär, med en embedding till vänster

2) Är Eulersk $d(4)=2$
$d(i)=4$, $i \neq 4$

3) Den är inte bipartit: t.ex är en cykel med udda längd

4) Den är hamiltonsk med t.ex en hamiltonsk cykel
$1 \to 2 \to 5 \to 4 \to 3 \to 6 \to 7 \to 11 \to 10 \to 9 \to 8 \to 1$

5) Eftersom grafen inte är bipartit $\chi(G) \geq 3$ och
$3 = \chi(G)$, t.ex ser färgning ovan i röd (1)(2)(3)

3) På hur många sätt kan man välja högst en gång varje tal) sex av talen så att produkten $>0$?
$-6, -5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Vi har 4 fall

i) Alla valda tal positiva $\binom{6}{0}\binom{6}{6}$
ii) 4 tal positiva $\binom{6}{2}\binom{6}{4}$
iii) 2 tal positiva $\binom{6}{4}\binom{6}{2}$
iv) 0 valda tal positiva $\binom{6}{6}\binom{6}{0}$

Totalt $2\left(1+\binom{6}{2}^2\right) = 452$

4a) Lös $4x^2+12xy+9y^2 = 49 \iff (2x+3y)^2 = 49$

Så $2x+3y = 7$ eller $2x+3y = -7$

$\gcd(2,3)=1 \mid 7 = (7)(1)$ | $\gcd(2,3)=1 \mid -7 = (-7)1$

$1 = (2)2 + (-1)3$ | $1 = (2)2 + (-1)3$

$\begin{cases} x = 14 - 3n = 2 - 3n' \\ y = -7 + 2n = 1 + 2n' \end{cases}$ $n \in \mathbb{Z}$ | $\begin{cases} x = -14 + 3m = 1 + 3m' \\ y = 7 - 2m = -3 + 2m' \end{cases}$ $m' \in \mathbb{Z}$

4b) Bestäm heltalen $n$ s.a. $7n-6 \equiv 0 \bmod 9$ $5n+9 \equiv 0 \bmod 11$

$\begin{cases} 7n \equiv 6 \bmod 9 \\ 5n \equiv 2 \bmod 11 \end{cases} \iff \begin{cases} n \equiv 6 \bmod 9 \ (\text{ty } 7(6) \equiv 42 \equiv 6 \bmod 9) \\ n \equiv 7 \bmod 11 \ (\text{ty } 5(7) \equiv 35 \equiv 2 \bmod 11) \end{cases}$

Mc LRS $n \equiv 6(11)x_1 + 7(9)x_2 \bmod 99$ $N = (9)(11) = 99$

där $11x_1 \equiv 1 \bmod 9$ och $9x_2 \equiv 1 \bmod 11$

$x_1 \equiv 5$ $(55 = 1+54)$ $x_2 \equiv 5$ $(45 = 1+44)$

så $n \equiv 6(11)(5) + 7(9)(5) \equiv 51 \bmod 99$

5) Lös $\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + b_n + (n+1) & (1) \\ b_{n+1} = -a_n + 4b_n - n & (2) \end{cases}$ $n \geq 0$ $a_0 = 1$, $b_0 = 2$

Från (2) $a_n = -b_{n+1} + 4b_n - n$; $a_{n+1} = -b_{n+2} + 4b_{n+1} - (n+1)$

Om vi sätter dem i (1) får vi

$-b_{n+2} + 4b_{n+1} - (n+1) = -2b_{n+1} + 8b_n - 2n + b_n + (n+1)$

dvs $b_{n+2} - 6b_{n+1} + 9b_n = 2$, $b_0 = 2$, $b_1 = -[illegible] = 7$

Likaledes från (1) $\begin{cases} b_n = a_{n+1} - 2a_n - (n+1) \\ b_{n+1} = a_{n+2} - 2a_{n+1} - (n+2) \end{cases}$

Om vi sätter dem i (2) får vi

$a_{n+2} - 2a_{n+1} - (n+2) = -a_n + 4a_{n+1} - 8a_n - 4n - 4^{-n}$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2+1$

$a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = -4n - 2$, $a_0 = 1$, $a_1 = 5$

Nu löser vi $b_{n+2} - 6b_{n+1} + 9b_n = -2$ $b_0 = 2$, $b_1 = 7$

Med högerledet $f(n) = 2(1)^n$ ett polynom av grad 0

För $b_n^{(h)}$ har vi karaktäristiska ekv

$r^2 - 6r + 9 = 0 \iff (r-3)^2 = 0 \Rightarrow r_1 = 3,\ m_1 = 2$

$b_n^{(h)} = (B_1 + B_2 n)(3)^n$

För $b_n^{(p)}$ ansatt $b_n^{(p)} = B$ och $B - 6B + 9B = -2,\ B = -\frac{1}{2}$

$b_n = -\frac{1}{2} + (B_1 + B_2 n)(3)^n$

Med BV $\begin{cases} 2 = b_0 = -\frac{1}{2} + B_1 & B_1 = \frac{5}{2} \\ 7 = b_1 = -\frac{1}{2} + 3B_1 + 3B_2 & B_2 = 0 \end{cases}$

$\underline{b_n = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}(3)^n \quad n \geq 0}$

Och $a_n = -b_{n+1} + 4b_n - n = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}(3)^{n+1} - 2 + \frac{20}{2}(3)^n - n$

$\underline{a_n = \frac{5}{2}(3)^n - n - \frac{3}{2}}, \quad n \geq 0$

6) Definiera, för $0 \leq t \leq 1$, $B_{i,n}(t) = \binom{n}{i}(1-t)^{n-i}(t)^i$, $1 \leq i \leq n$

observera att det finns $n+1$ av dem. Uppgiften säger hur vi kan använda egenskaper hos binomiala koefficienter för att ha avbildningar med bra egenskaper

i) Visa att givet $t$, $0 \leq t \leq 1$, $\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t) = 1$

$\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}(1-t)^{n-i}(t)^i \overset{\text{Binomialsatsen}}{=} (1-t+t)^n = 1 = 1$

ii) $1 \leq i \leq n-1$ $B_{i,n}(t) = \binom{n}{i}(1-t)^{n-i}(t)^i =$

$\left(\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1}\right)(1-t)^{n-i}(t)^i = \binom{n-1}{i}(1-t)^{n-1-i}(1-t)(t)^i$

$+ \binom{n-1}{i-1}(1-t)^{n-1-(i-1)}(t)^{i-1}(t) = B_{i,n-1}(t)(1-t) + B_{i-1,n-1}(t)\,t$ V.S.V.

iii) $B_{0,n}(t) = \binom{n}{0}(1-t)^n(t)^0 = (1-t)\binom{n-1}{0}(1-t)^{n-1}(t)^0 =$

$= (1-t)\,B_{0,n-1}(t)$

iv) $B_{n,n}(t) = \binom{n}{n}(1-t)^0(t)^n = t\binom{n-1}{n-1}(1-t)^0(t)^{n-1} = t\,B_{n-1,n-1}(t)$

v) $B_{n-i,n}(t) = \binom{n}{n-i}(1-t)^i(t)^{n-i} = \binom{n}{i}(1-t)^i(t)^{n-i} = B_{i,n}(1-t)$

$B_{i,n}(1-t) = \binom{n}{i}(1-1+t)^{n-i}(1-t)^{n-i} = \binom{n}{i}(t)^{n-i}(1-t)^i$

7/ Låt $\mathcal{A} = \{ l = (x_{1023}, \ldots x_5, x_3, x_2, x_1, x_0) : x_i = 0,1 ; 0 \le i \le 1023 \}$
Vi definierar en relation $\mathcal{R}$ som $l_1 \mathcal{R} l_2$ om $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4$ och $x_5$ är lika i $l_1$ och $l_2$

a) $\mathcal{R}$ är en ekvivalensrelation eftersom $\mathcal{R}$ är
i) reflexiv: $\forall l \in \mathcal{A}$ $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4$ och $x_5$ är unika (beror endast på $l$)
ii) symmetrisk: Om $l_1 \mathcal{R} l_2$ då $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4$ och $x_5$ är lika för $l_1$ och $l_2$, eller för $l_2$ och $l_1$, så $l_2 \mathcal{R} l_1$
iii) transitiv: Om $l_1 \mathcal{R} l_2$ och $l_2 \mathcal{R} l_3$ då $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4$ och $x_5$ är lika i $l_1$, $l_2$ och $l_3$ så $l_1 \mathcal{R} l_3$

b) Varje ekvivalensklass ges av en följd $(x_5, x_4, x_3, x_2, x_1, x_0)$ med $x_i = 0,1$ för $0 \le i \le 5$
Det finns $2^6$ sådana följder och så det finns
$64 = 2^6$ ekvivalensklasser

c) I varje ekvivalensklass $x_5, x_4, x_3, x_2, x_1$ och $x_0$ är bestämda och fixerade så det finns
$2^{(1024-6)} = 2^{1018}$ följder i varje klass
(vi kan välja 0 eller 1 för 1018 positioner)