

Tentamen i Diskret Matematik, TATA32 (916G24), ETE373 TEN2, 2026-01-05, kl 14-19.**Inga hjälpmedel. Ej räknedosa. Fullständiga motiveringar krävs.**

För betyg 3 behövs 15 poäng, för betyg 4, 20 poäng och 24 poäng för betyg 5, inklusive eventuella bonuspoäng.

1. Låt $\{L_n\}$ vara följderna av Lucastal som definieras genom $L_0 = 2, L_1 = 1, L_m = L_{m-1} + L_{m-2}, m \geq 2$. Visa med induktionsprincipen att $L_0^2 + \dots + L_n^2 = L_{n+1}L_n + 2$ för varje $n \geq 1$. (5p)
2. På hur många sätt kan man lämna minst 5 och högst 40 böcker på 5 hyllplan om inget hyllplan är tomt och varje hyllplan har plats för högst 11 böcker. (5p)
3. Betrakta avbildningen f som definieras över de positiva heltal $t = 3^n$ som är potenser av 3. Avbildningen ges rekursivt av $f(t) = 2f(t/3) + n, n \geq 1$ och $f(1) = 1$. Genom att betrakta följderna av värdena $v_n = f(t), (t = 3^n)$ ange en explicit formel för f och bestäm $f(2187)$ (5p)
4. Betrakta mängden $\mathcal{M}$ av binära (3×3) -matriser $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, a_{ij} = 0, 1$. Vi definierar en relation $\mathcal{R}$ på $\mathcal{M}$ genom: $M_k = (a_{i,j}) \mathcal{R} M_h = (b_{i,j})$ om M_k och M_h har samma diagonal, dvs $a_{11} = b_{11}, a_{22} = b_{22}, a_{33} = b_{33}$.
 - (a) Ange storleken på mängden $\mathcal{M}$ (1p)
 - (b) Visa att $\mathcal{R}$ är en ekvivalensrelation. (3p)
 - (c) Bestäm ekvivalensklasser för $\mathcal{R}$ genom att ange en representant, och antal matriser i varje klass. (2p)
5. Betrakta mängden $\mathcal{M}$ av binära (3×3) -matriser $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, a_{ij} = 0, 1$. Vi definierar en relation $\preceq$ på $\mathcal{M}$ genom: $M_k = (a_{i,j}^k) \preceq M_h = (a_{i,j}^h)$ om $a_{i,j}^k \leq a_{i,j}^h$ för alla element i matriserna $1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 3$.
 - (a) Visa att $\preceq$ är en partialordning. (3p)
 - (b) Betrakta $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$. Ange, om de finns, möb(B) och sub(B) (1p)
 - (c) Ange, om de finns, minsta och största element i $(\mathcal{M}, \preceq)$. (1p)
 - (d) Är $(\mathcal{M}, \preceq)$ en lattice? (1p)
6. Formulera och bevisa principen för inklusion och exklusion för två och tre mängder. (3p)

- 1) $\{L_n\}$ definieras rekursivt som $L_0 = 2, L_1 = 1$,
 $L_m = L_{m-1} + L_{m-2}, m \geq 2$. Visa med TP att
 $L_0^2 + \dots + L_n^2 = L_{n+1} L_n + 2 \quad \forall n \geq 1$

Vi visar i) likheten gäller för $n=1$, och först

$$L_2 = L_1 + L_0 = 3.$$

$$\text{Nu } \forall L_1: L_0^2 + L_1^2 = 4 + 1 = 5 = (3)(1) + 2 = L_2 L_1 + 2 \quad \text{Satt}$$

ii) Antag att $\sum_{k=0}^n L_k^2 = L_{n+1} L_n + 2$ för alla n mellan 1 och p och $p \geq 1$. Och kontrollera för $p+1$

$$\forall L_{p+1}: L_0^2 + \dots + L_p^2 + L_{p+1}^2 \stackrel{\text{Antagande}}{=} L_{p+1} L_p + 2 + L_{p+1}^2 \stackrel{p+1 \geq 2}{=} L_{p+1} (L_p + L_{p+1}) + 2 \stackrel{\text{def}}{=} L_{p+1} L_{p+2} + 2 = H_{p+1} \quad \text{USO V}$$

- 2) Eftersom ordningen i varje hyllplan spelar ingen roll frågan är ekvivalent till icke-negativa lösningar av $5 \leq x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 40$ med $1 \leq x_i \leq 11, 1 \leq i \leq 5$, som är ekvivalent till $x_i = y_i + 1$ (eftersom hyllplan är ej tomma)
 $0 \leq y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 \leq 35, 0 \leq y_i \leq 10, 1 \leq i \leq 5$

För att "rädda" med att kanske vi inte har 35 böcker (eftersom vi läser en bok i varje hyllplan) inför vi variabeln $s: y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + s = 35, 0 \leq y_i \leq 10, 0 \leq s \leq 5, 1 \leq i \leq 5$ och vi kan räkna ut varje $y_i \geq 10$, precis vad vi inte vill så modellerar $A_i = \text{icke-negativa lösningar där } y_i \geq 10, 1 \leq i \leq 5$
 Vi letar efter $|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_5|$, med

$\mathcal{U} = \{ \text{icke negativa lösningar av } \sum_{i=1}^5 x_i + 3 = 35 \}$

$$|\mathcal{U}| = \binom{35+5}{5} = \binom{40}{5}$$

Med PIE $|A_1 \cup \dots \cup A_5| = |\mathcal{U}| - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 - \alpha_5$
 Vi ser att $x_4 = x_5 = 0$ eftersom de kräver minst 44 böcker och det finns endast 35

$$\text{Nu } |A_i| = \binom{35-11+5}{5} = \binom{29}{5}, 1 \leq i \leq 5$$

$$\alpha_1 = 5 \binom{29}{5}$$

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2}| = \binom{35-22+5}{5} = \binom{18}{5} : \alpha_2 = 10 \binom{18}{5}$$

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| = \binom{35-33+5}{5} = \binom{7}{5} : \alpha_3 = 10 \binom{7}{5}$$

Totalt antal sätt: $|\mathcal{U}| - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 =$

$$= \binom{40}{5} - 5 \binom{29}{5} + 10 \binom{18}{5} - 10 \binom{7}{5}$$

3) $f: \{3^n, n \geq 0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(1) = 1, f(t) = 2f(t/3) + n$
 vi kan uttrycka f som $f(3^n) = 1$ (nco)

$$f(3^n) = 2f(3^{n-1}) + n, n \geq 1, \text{ med värdena}$$

$v_0 = 1, v_n = 2v_{n-1} + n, n \geq 1$. Vi kan lösa den rekursiva ekvationen $v_n - 2v_{n-1} = n, n \geq 1, v_0 = 1$
 med karakteristiska ekv $r - 2 = 0, r = 2$

$$v_n^{(h)} = A(2)^n$$

En partikulärlösning $v_n^{(p)} = B_1 n + B_0$, som uppfyller

$$B_1 n + B_0 - 2B_1(n-1) - 2B_0 = n \quad \left| \begin{array}{l} -B_1 = 1, \quad B_1 = -1 \\ 2B_1 - B_0 = 0 \quad B_0 = -2 \end{array} \right.$$

$$v_n^{(p)} = -n - 2$$

$$v_n = A(2)^n - n - 2 \text{ med BV } v_0 = 1 = A - 2, A = 3$$

$$2187 = 3^7 \quad \underline{v_n = 3(2)^n - n - 2 = f(3^n)}$$

$$f(2187) = f(3^7) = 3(128) - 9 = 375$$

4) $M = \{ (a_{ij})_{3 \times 3}, a_{ij} = 0, 1 \}$

(a) $|M| = 2^9 = 512$ eftersom varje element kan anta 2 värden

(b) $\mathcal{R}$ på M definierad $(a_{ij}) \mathcal{R} (b_{ij})$ om

$a_{ii} = b_{ii} \quad 1 \leq i \leq 3$. Vi ser att $\mathcal{R}$ är

i) reflexiv eftersom diagonalen i varje matris är unik

ii) symmetrisk eftersom om $(a_{ij}) \mathcal{R} (b_{ij})$ så

$a_{ii} = b_{ii}, 1 \leq i \leq 3$ och $b_{ii} = a_{ii}, 1 \leq i \leq 3$, så

$(b_{ij}) \mathcal{R} (a_{ij})$

iii) transitiv eftersom om $(a_{ij}) \mathcal{R} (b_{ij})$ och $(b_{ij}) \mathcal{R} (c_{ij})$

$a_{ii} = b_{ii} = c_{ii}, 1 \leq i \leq 3$, så $a_{ii} = c_{ii}$ så

$(a_{ij}) \mathcal{R} (c_{ij})$

$\mathcal{R}$ är en ekvivalensrelation

(c) Det finns 8 ekvivalensklasser, som bestäms

av de 8 olika diagonaler (a_{11}, a_{22}, a_{33})

$(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)$

Och varje ekvivalensklass har $2^6 = 64$ matriser

eftersom varje element i en matris utomför diagonalen kan anta 2 värden.

5) Vi definierar på samma mängd M relationen

$\leq$, $(a_{ij}^h) \leq (a_{ij})$ om $a_{ij}^h \leq a_{ij}, 1 \leq i, j \leq 3$

$\leq$ är

(a) i) reflexiv eftersom för varje matris (a_{ij})

$a_{ij} \leq a_{ij}$ för alla $1 \leq i, j \leq 3$

ii) antisymmetrisk eftersom om $(a_{ij}^h) \leq (a_{ij})$

och $(a_{ij}) \leq (a_{ij}^h)$, så har $\forall i, j, 1 \leq i, j \leq 3$

$a_{ij}^h \leq a_{ij} \leq a_{ij}^h \Rightarrow a_{ij}^h = a_{ij}$ och $(a_{ij}^h) = (a_{ij})$

iii) transitiv eftersom om $(a_{ij}^u) \leq (a_{ij}^h)$ och $(a_{ij}^h) \leq (a_{ij}^e)$ (matriser M_u, M_h, M_e)

så $\forall i, j, 1 \leq i, j \leq 3$ $a_{ij}^u \leq a_{ij}^h \leq a_{ij}^e$ så $a_{ij}^u \leq a_{ij}^e$ och $M_u \leq M_e$

Så $\leq$ partiellordning

(b) Givet $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

$$\text{mjb}(B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{sub}(B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(d) $(M, \leq)$ är en lattice eftersom givet $B = \{ (a_{ij}), (b_{ij}) \}$

$$\text{mjb}(B) = (c_{ij}) \text{ där } \underline{c_{ij} = \max\{a_{ij}, b_{ij}\}}$$

för $1 \leq i, j \leq 3$

$$\text{sub}(B) = (d_{ij}) \text{ där}$$

$$\underline{d_{ij} = \min\{a_{ij}, b_{ij}\}}, 1 \leq i, j \leq 3$$

(c) minsta element är matrisen $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

största element är matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$