LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Milagros Izquierdo

Tentamen i Diskret Matematik, TATA32 (916G24), ETE373 TEN2, 2025–01–07, kl 14–19.

Inga hjälpmedel. Ej räknedosa. Fullständiga motiveringar krävs.

För betyg 3 behövs 15 poäng, för betyg 4, 20 poäng och 24 poäng för betyg 5, inklusive eventuella bonuspoäng.

---

1. Låt $\{F_n\}$ vara följden av Fibonaccital där $F_1 = 1, F_2 = 2, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 3$. Visa med induktionsprincipen att $F_1 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 2$ för varje $n \geq 1$. (5p)

2. (a) På hur många olika sätt kan man **dela** 12 böcker i 4 olika hyllor med minst en bok i varje hylla? (2p)

   (b) På hur många olika sätt kan man dela 12 böcker i 4 olika hyllor, med tre böcker i varje hylla? (2p)

   (c) På hur många olika sätt kan man dela 12 böcker i 4 lådor, med tre böcker i varje låda? Observera att ordningen på lådor spelar ingen roll. (1p)

   (d) Hur många olika partitioner av en mängd med 12 element i 4 ekvivalensklasser med 3 element i varje klass finns det? (1p)

   (e) På hur många olika sätt kan man **arrangera** 12 böcker i 4 olika hyllor? (1p)

3. En följd $\{a_n\}$ definieras av $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 12$, och $a_{n+3} - 6a_{n+2} + 12a_{n+1} - 8a_n = 0$, för alla $n \geq 0$. Ange en explicit formel för a_n. (5p)

4. Betrakta mängderna A av binära listor med 6 bits och B av binära listor med 5 bits. Hur många avbildningar $f : A \to B$ tar varje lista som börjar med 1 till listan $(1,1,1,1,1)$ och listor som börjar med 0 till en lista som börjar med 0. (3p)

5. Betrakta mängderna $M = \{a,b,c,d,e\}, N = \{1,2,3,4,5\}, P = \{X; X \subseteq M\}$ och $\mathcal{A} = \{(i,X)\ i \in N, X \in P\}$. Vi definierar en relation $\preceq$ på $\mathcal{A}$ genom: $p = (i,X) \preceq q = (j,Y)$ om $i \leq j$, $X \subseteq Y$. Observera att $\mathcal{A}$ har 160 element.

   (a) Visa att $\preceq$ är en partialordning. (3p)

   (b) Betrakta $B = \{p_1 = (4, X = \{a,c,e\}), p_2 = (3, Y = \{a,b,c,d\})\}$. Ange, om de finns, möb(B) och sub(B) (1p)

   (c) Ange, om de finns, minsta och största element i $(\mathcal{A}, \preceq)$. (2p)

   (d) Är $(\mathcal{A}, \preceq)$ en lattice? (1p)

6. Formulera och bevisa binomial- och multinomialsatserna. (3p)

Svar TATA32/ETE373 Diskret matematik 7/01-2025

1) Låt $\{F_n\}$ vara följden $F_1 = 1$, $F_2 = 2$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n \geq 3$

Visa med IP att $F_1 + \dots + F_n = F_{n+2} - 2$, $\forall n \geq 1$

Vi visar i) Formeln sant för $n=1$ och $n=2$

i) $n=1$ $F_1 = 1 = 3-2 = F_3 - 2$ sant (enligt def. $F_3 = F_1 + F_2 = 3$

ii) $n=2$ $F_1 + F_2 = 1+2 = 3 = 5-2$ sant eftersom $F_4 = F_3 + F_2 = 5$.

Anta nu att formeln är sant för alla p mellan 1 och ett $n \geq 2$ och ska visas att

$F_1 + \dots + F_{n+1} = F_{n+3} - 2$ med $n+1 \geq 3$. Men

$F_1 + \dots + F_n + F_{n+1} = (F_1 + \dots + F_n) + F_{n+1} \overset{\text{Antagande}}{=} F_{n+2} - 2 + F_{n+1}$

$= F_{n+2} + F_{n+1} - 2 \underset{\text{def av Fib-tal}}{=} F_{n+3} - 2$ v.s.v

2a) Om man dela 12 böcker i 4 hyllor med minst en bok i varje hylla, man ska dela 8 böcker i 4 hyllor : $\binom{8+4-1}{4-1} = \binom{11}{3} = \binom{11}{8}$

2b) För att dela 12 böcker i 4 hyllor, med 3 böcker var ordning i varje hylla spelar ingen roll så $\binom{12}{3,3,3,3} = (11)(10)(8)(7)(5)(4)(3)$

2c - 2d) (De är samma fråga: varje partition är en indelning av element i lådor / delmängden där ordning på delmängder spelar ingen roll)

Så $\underbrace{\binom{12}{3,3,3,3} \frac{1}{4!}}_{\text{alla sätt att ordna 4 lådor}} = (11)(10)(7)(5)(4)$

2e) Ska vi arrangera 12 böcker har vi 12! sätt att arrangera, så 12!

3) Formeln för $\{a_n\}$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 12$; $a_{n+3} - 6a_{n+2} + 12a_{n+1} - 8a_n = 0$

kar. ekv : $r^3 - 6r^2 + 12r - 8 = 0 \iff (r-2)^3 = 0$ $\underline{r = 2 \text{ trippelrot}}$

$$a_n = A_\phi (2)^n + A_2 n (2)^n + A_3 n^2 (2)^n$$

BV $\begin{cases} a_\phi = 1 = A_1 \\ a_1 = 2 = 2A_1 + 2A_2 + 2A_3 \\ a_2 = 12 = 4A_1 + 8A_2 + 16A_3 \end{cases} \iff \begin{cases} A_1 = 1 \\ A_2 = -A_3 \\ 8 = 8A_3 \end{cases}$

$$A_3 = 1 \;;\; A_2 = -1 \;,\; A_1 = 1$$

$$\underline{| a_n = (n^2 - n + 1)(2)^n |}$$

4) $A = \{\text{listor med 6 bits}\} = \{(x_1, \dots, x_6) ; x_i = 0, 1\}$; $|A| = 64$

$B = \{(y_1, \dots, y_5) ; y_i = 0, 1\}$; $|B| = 32$

Vi vill beräkna avbildningar $f : A \longrightarrow B$ sådana att $f(1, x_2, \dots, x_6) = (1,1,1,1,1)$ och $f(0, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) =$
$= (0, y_2, y_3, y_4, y_5)$

Så för 32 listor i A bilden är given och för varje av de andra 32 listor vi kan välja mellan 16 listor i B : $(1)^{32} \underline{(16)^{32} = (2)^{128}}$

(Jag sa att jag också tillåter att tänka som 2 olika uppgifter i så fall blir

i) Om listor som börjar med 1 går till $(1,1,1,1,1)$:

$(1)^{32} (32)^{32}$

ii) Om listor som börjar med 0 går till listor som börjar med 0 : $(32)^{32}$ $(16)^{32}$

5) Betrakta $M = \{a, b, c, d, e\}$, $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$P = \{X ; X \subseteq M\}$ $(|P| = 32)$ och $\mathcal{A} = \{(i, X) \in N \times P\}$
Vi definierar $\preceq$ genom $(i, X) \preceq (j, Y)$: $i \leq j$, $X \subseteq Y$

a) $\preceq$ är en partialordning ty
i) $\preceq$ reflexiv: $\forall (i, X) \in \mathcal{A}$ $i \leq i$ och $X \subseteq X$
ii) $\preceq$ antisymmetrisk: Om $(i, X) \preceq (j, Y)$ och $(j, Y) \preceq (i, X)$ så $\begin{cases} i \leq j \leq i \implies j = i \\ X \subseteq Y \subseteq X \implies X = Y \end{cases}$

$(i, X) = (j, Y)$, som önskad

iii) $\preceq$ transitiv: Om $(i, X) \preceq (j, Y)$ och $(j, Y) \preceq (h, Z)$ så $\begin{cases} i \leq j \leq h \implies i \leq h \\ X \subseteq Y \subseteq Z \implies X \subseteq Z \end{cases}$ så

$(i, X) \preceq (h, Z)$, som önskad

b) $B = \{p_1 = (4, \{a, c, e\}), p_2 = (3, \{a, b, c, d\})\}$
$mob(B) = (4, \{a, b, c, d, e\}) = (4, M)$
$sub(B) = (3, \{a, c\})$

d) Minsta element är $p_\emptyset = (1, \emptyset)$
Största element är $p_M = (5, M)$

e) $(\mathcal{A}, \preceq)$ är en lattice där om $B = \{(i, X), (j, Y)\}$
$mob(B) = (\max\{i, j\}, X \cup Y)$
$sub(B) = (\min\{i, j\}, X \cap Y)$