

Tentamen i Diskret Matematik, TATA32 (916G24), ETE373 TEN3, 2025–03–19, kl 08–13.

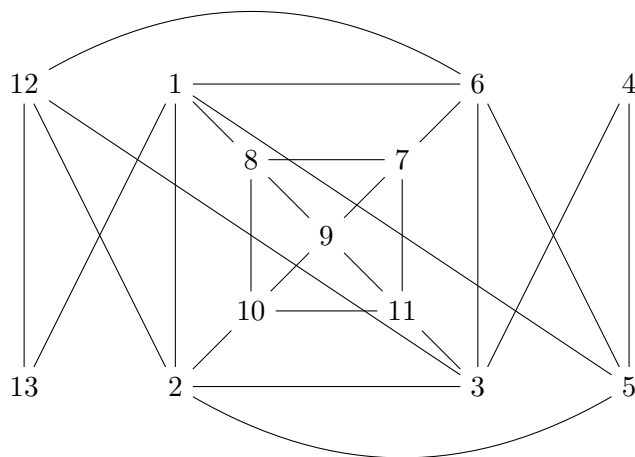
Inga hjälpmedel. Ej räknedosa. Fullständiga motiveringar krävs.

För betyg 3 behövs 15 poäng, för betyg 4, 20 poäng och 24 poäng för betyg 5, inklusive eventuella bonuspoäng.

- Ange värdet mod13 av $(98^2 \bmod 32)^3 \bmod 13$. Observera ordningen för parenteser (1p)
 - Hur många heltal mellan 1 och 15015 är relativt prima med 15015. Svara med ett heltal. (2p)
 - Ange representationen av heltalet 17408 i bas 8. (2p)
- Lös, om möjligt, systemen av linjära ekvationer

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z \equiv 17 \bmod 19 \\ x - 4y + 5z \equiv 17 \bmod 19 \\ x - y + 10z \equiv 2 \bmod 19 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 3y + 4z \equiv 17 \bmod 19 \\ x - y + 3z \equiv 10 \bmod 19 \\ -4x + 9y + 5z \equiv 10 \bmod 19 \end{cases} \quad (3p + 3p)$$

- För vilka värden på parametern a , $a \in \mathbb{Z}_{11}$ har ekvationen $x^4 - a \equiv 0 \bmod 11$ lösning? Ange också hur många lösningar **mod11** det finns för dessa värden på a . (4p)
- Studera om grafen G_1 nedan är Hamiltonsk, Eulersk, planär och bipartit. Ange kromatiska talet till grafen. Varje fråga ger 1p.



G

- För en lämplig dataanalys behöver man arbeta med **rotade fullständiga ternära träd med höjden 2**.
 - Lista alla sådan träd. (4p)
 - Ange deras isomorfi-klasser med en representant för varje klass och ange hur många träd som finns i varje klass (2p)
 - Visa att antalet löv i ett träd bestämmer dess isomorfi-klass. (1p)
- Formulera och bevisa satsen om Topologisk karakterisering av träd. (3p)

1a) Ange värdet $(98^2 \bmod 32)^3 \bmod 13$

$$98 \equiv 2 \bmod 32; 98^2 \equiv 4 \bmod 32; 4^3 \bmod 13 \equiv -1 \equiv \underline{12 \bmod 13}$$

1b) Antal heltal mellan 1 och 15015 som är rel. prima med 15015. ~~är~~ $\varphi(15015) = (2)(4)(6)(10)(12)$ eftersom $15015 = (3)(5)(7)(11)(13)$, så $\underline{\varphi(15015) = 5760}$

1c) Representation av heltalet 17408 i bas 8 blir
 $17408 = 2176(8) + 0$; $2176 = 272(8) + 0$; $272 = 34(8) + 0$
 $34 = 4(8) + 2$; stopp $4 \leq 8$. Så
 17408 blir 420008

2a) Lös.
$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z \equiv 17 \bmod 19 \\ x - 4y + 5z \equiv 17 \bmod 19 \\ x - y + 10z \equiv 2 \bmod 19 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 10z \equiv 2 \bmod 19 \\ 3y + 5z \equiv 4 \bmod 19 \\ 5y + 3z \equiv 13 \bmod 19 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 10z \equiv 2 \bmod 19 \\ 3y + 5z \equiv 4 \bmod 19 \\ 9z \equiv 0 \bmod 19 \end{cases} \quad \boxed{\begin{cases} x \equiv 16 \bmod 19 \\ y \equiv 14 \bmod 19 \\ z \equiv 0 \bmod 19 \end{cases}}$$

2b) Lös
$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z \equiv 17 \bmod 19 \\ x - y + 3z \equiv 10 \bmod 19 \\ -4x + 9y + 5z \equiv 10 \bmod 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 3z \equiv 10 \\ 15y + 13z \equiv 6 \bmod 19 \\ 5y + 17z \equiv 16 \bmod 19 \end{cases}$$

1u (1) $\text{rad}_2 + (-3) \text{rad}_3$ ger $0 \equiv 15 \bmod 19$ 6 lösning

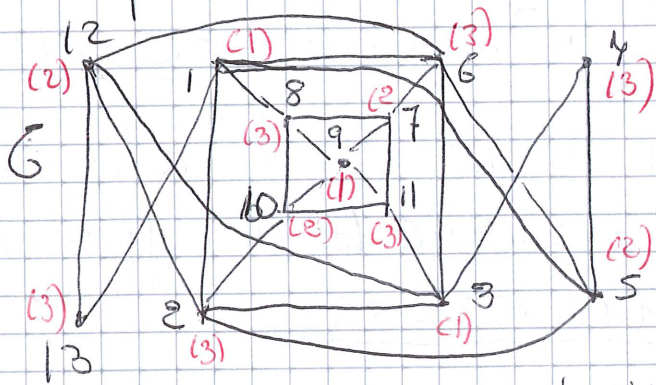
3) mod 11 har vi: $0^4 \equiv 0$; $1^4 \equiv (-1)^4 \equiv (10)^4 \equiv 1$

$(2)^4 \equiv (9)^4 \equiv 5$; $(3)^4 \equiv (8)^4 \equiv 4$; $(4)^4 \equiv (7)^4 \equiv 3$; $(5)^4 \equiv (6)^4 \equiv 9$

Så ekvationen $x^4 - a \equiv 0 \bmod 11 \Leftrightarrow x^4 \equiv a \bmod 11$

har lösning för $a \equiv 0$, 1 lösning; $a \equiv 1$, 2 lösningar;
 $a \equiv 3$, 2 lösningar; $a \equiv 4$, 2 lösningar; $a \equiv 5$, 2 lösningar;
 $a \equiv 9$, 2 lösningar

4) Är grafen till vänster Eulersk? Hamiltonsk? Planar?
Bipartit? Vad är kromatiska brek?

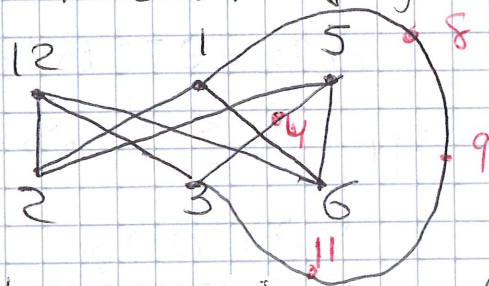


.) Ej Eulersk, t. ex $d_G(6) = 5$ udda

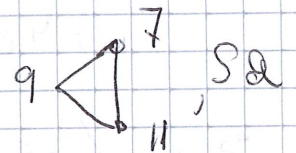
.) Hamiltonsk, t. ex

$9 \rightarrow 8 \rightarrow 1 \rightarrow 13 \rightarrow 12 \rightarrow 6 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 10 \rightarrow 11 \rightarrow 7 \rightarrow 9$ är en Hamiltonsk cykel

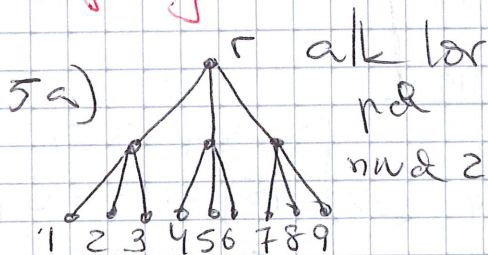
Ej planar innehåller följande kantindelning av $K_{3,3}$



Ej bipartit: t. ex innehåller triangeln

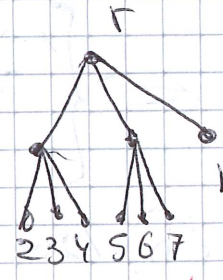
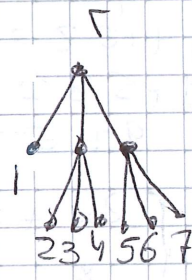
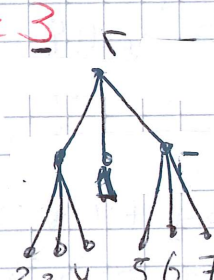


$\chi(G) \geq 3$; i röd (1)(2)(3) finns en färgning med 3 färger så $\chi(G) = 3$



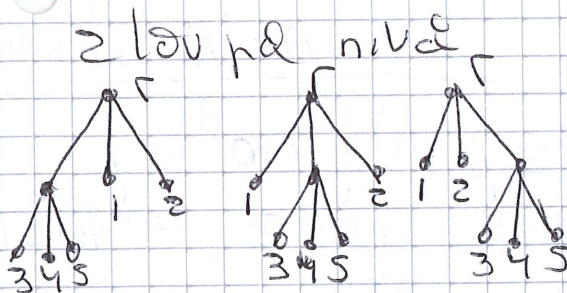
allt för
röd
nivå 2

EH för
röd
nivå 1



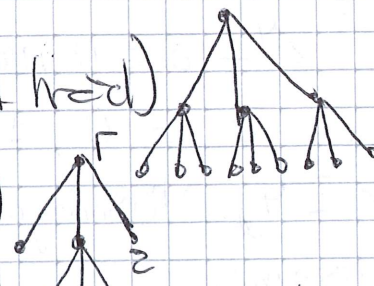
Alla isomorfer genom ett röd nivå
röd nivå 1 till vänster eller höger

Alla isomorfer genom ett röd
gröna med nivåer 1 eller 2 steg
ett höger.

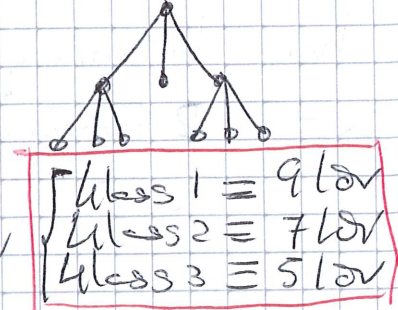


5b) klass 1 (med 1 träd)

klass 3 (med 3 träd)



klass 2 (med 3 träd)



5c) klassen parametreras av antal nivå

klass 1 = 9 nivå
klass 2 = 7 nivå
klass 3 = 5 nivå