LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Milagros Izquierdo

Tentamen i Diskret Matematik, TATA32 (916G24), ETE373 TEN3, 2025–08–25, kl 08–13.

Inga hjälpmedel. Ej räknedosa. Fullständiga motiveringar krävs.

För betyg 3 behövs 15 poäng, för betyg 4, 20 poäng och 24 poäng för betyg 5, inklusive eventuella bonuspoäng.

---

1. (a) Hitta heltalslösningar till $325x + 26y = 91$, om de finns. (2p)

   (b) Hitta lösningar till ekvationen $x^3 + 5x^2 + x + 3 = 0 \bmod 11$, om de finns. Ange deras multiplicitet (2p)

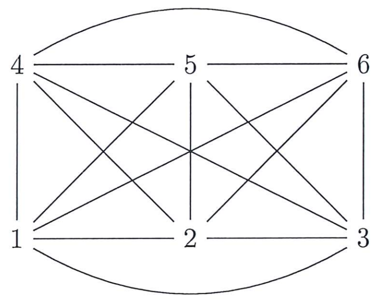
   (c) Hitta heltalet mellan 600 och 1000 som är en multipel av 9 och som lämnar resten 1 när det delas med vart och ett av heltalen 2, 5 och 7. (3p)

2. Betrakta fem heltal a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 där varje heltal a_i är minst 1. Visa att någon summa av talen är en multipel av 5 (antalet termer i en summa kan variera mellan 1 och 5). (5p)

3. Vi kan betrakta varje bricka i ett domino som en länk som förbinder två tal fr.o.m. 0 t.o.m. 6. Visa att vi kan arrangera alla 28 brickorna på ett sådant sätt att de bildar en enda sluten bana utan korsningar, om man efter en bricka som slutar på ett visst tal får sätta en annan bricka med börjar på samma tal. (5p)

4. (a) Visa att det inte finns en planär graf med alla noder med gradtal 3 och regioner med gradtal 5 eller 6 (inget annat gradtal). (3p)

   (b) Bestäm kromatiska talet av nätverket nedan. (2p)



G

5. (a) Visa med grafteori följande påstående: " $3n, n \geq 2$ professorer sitter vid ett runt bord, var och en har högst n fiender bland de andra professorerna. Då kan varje professor sitta mellan två icke-fiender och kan hälsa artigt genom att skaka hand med bredvidsittande professorer". (3p)

   (b) Vilket begrepp används för att modellera uppgiften? (1p)

   (c) Kan du ange det högsta antalet fiender en professor kan ha och vi kan vara säkra på att alla kan sitta vid bordet och vara artiga? (1p)

6. Formulera och bevisa Fermats lilla sats för primtal. Om man behöver hjälpsatser formulera och bevisa dem (3p)

Svar Diskret matematik TATA32/ETE373 TEN3 25/8 2025

1a) Lös ekv. $325x + 26y = 91$, om möjligt

* $sgd(325, 26) = 13$ och $13 \mid 91$ $(91 = (13)(7))$, lösbar

* $13 = (1)325 + (-12)26$; $91 = (7)13$ så

$x_0 = 1$, $y_0 = -12$, $k = 7$ och

* $\begin{cases} x^{(p)} = 7 \\ y^{(p)} = -84 \end{cases}$ och $\begin{cases} x = 7 - 2n \\ y = -84 + 25n \end{cases}$ $n \in \mathbb{Z}$

1b) Ange lösningar med multiplicitet till $x^3 + 5x^2 + x + 3 \equiv 0$

* Vi kontrollerar först att $x \equiv 2$ löser den $8 + 20 + 2 + 3 \equiv 0$

* Vi delar $(x^3 + 5x^2 + x + 3)/(x - 2) \equiv (x^3 + 5x^2 + x + 3)/(x + 9)$

$$\frac{x^3 + 5x^2 + x + 3}{x - 2} \equiv x^2 + 7x + 4 \equiv x^2 - 4x + 4 \equiv (x-2)^2$$

Så lösningen är $\underline{-2}$ med $\underline{\text{multiplicitet } 3}$

Alt $(x-2)^3 \bmod 11 \equiv x^3 + (3)(-2)x^2 + 3(4)x + (-8) \bmod 11$

$\equiv x^2 + 5x^2 + x + 3 \bmod 11$

1c) Med KRS: $600 \leq x \leq 1000$ där

$\begin{cases} x \equiv 0 \bmod 9 \\ x \equiv 1 \bmod 2 \\ x \equiv 1 \bmod 5 \\ x \equiv 1 \bmod 7 \end{cases}$ med $N = (2)(5)(7)(9) = 630$

$N_1 = 70$; $N_2 = 315$; $N_3 = 126$; $N_4 = 90$

$x_1 = 4$; $x_2 = 1$; $x_3 = 1$; $x_4 = -1$

$x \equiv (0)(70)(4) + (1)(1)(315) + (1)(126)(1) + (1)(90)(-1)$

$\equiv 341 \bmod 630 \equiv \underline{971}$, med $\underline{600 \leq 971 \leq 1000}$

2) Betrakta a_i, $1 \leq i \leq 5$, med $a_i \geq 1$. Varje a_i är kongruent med 0, 1, 2, 3 eller 4 mod 5. Vi har fall i) Om något $a_i \equiv 0 \bmod 5$ ta summan a_i

Anta nu att $\underline{\text{inget}}$ $a_i \equiv 0 \bmod 5$

ii) Om alla är kongruenta med varandra, ta summan

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \equiv 5(j) \equiv 0$; vi skriver $a_i \equiv j \mod 5$

iii) Om $a_1 \equiv a_2 \equiv j$ och $a_3 \equiv a_4 \equiv a_5 \equiv i$ $(0 \not\equiv j \not\equiv i \not\equiv 0)$ (så 2 kongruensklasser), vi kan separera i fall

a) $a_1 \equiv 1, a_3 \equiv 2$ $\quad a_1 + a_3 + a_4 \equiv 0$, det samma gäller för $a_1 \equiv 2, a_3 \equiv 4$; $a_1 \equiv 3, a_3 \equiv 1$; $a_1 \equiv 4, a_3 \equiv 3$

b) $a_1 \equiv 1, a_3 \equiv 3$ (or $a_1 \equiv 2, a_3 \equiv 1$; $a_1 \equiv 3, a_1 \equiv 4$; $a_1 \equiv 4, a_3 \equiv 2$)

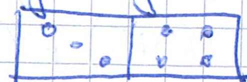
fa $\quad a_1 + a_2 + a_3 \equiv 0$

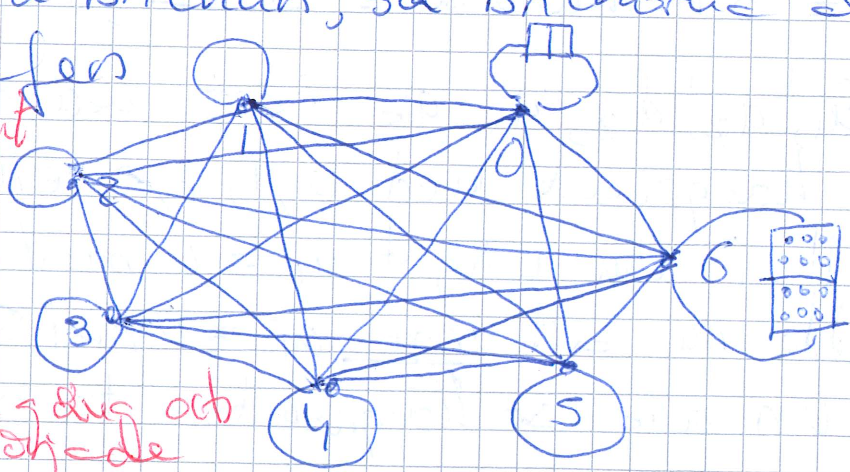
c) Om $a_1 \equiv j$ och $a_3 \equiv i$ med $j + i = 5$ fa

$$a_1 + a_3 \equiv 0$$

iv) Om det finns exakt 3 kongruensklasser $a_1 \equiv a_2 \equiv j$; $a_3 \equiv a_4 \equiv i$; $a_5 \equiv h$, eftersom inget är $\equiv 0$ antingen $j+i$, $j+h$ or $i+h$ adderar till fem, men nu vi är i fallet iii c) igen.

v) Slutligen om alla 5 hör till 4 kongruensklasser det måste finnas $a_1 \equiv 1$ och $a_2 \equiv 4$, vi får $a_1 + a_2 \equiv 0$

3 Frågan handlar om eulerska grafer: Vi kan betrakta brickorna i ett domino som kanter i en graf med 7 noder: $0, \ldots, 6$ där varje bricka  förbinder noderna med siffran på brickan, så brickorna är kanter i grafen



Så $d(v) = 8$ jämnt och grafen är eulersk, dvs vi kan gå alla brickor exakt en gång och sluta där vi började

4a) Kan det finnas en planär graf med noderna med gradtal 3 och regioner med gradtal 5 eller 6 och endast gradtal 5 eller 6?

Vi sätter ekvationer för en sådan graf:

$|V(G)| = n$, $|E(G)| = e$, f = antal regioner

$$\begin{cases} n - e + f = 2 \\ 3n = 2e \\ 5x + 6y = 2e, \text{ där } f = x + y \end{cases}$$

x = antal reg med gradtal 5
y = antal reg med gradtal 6

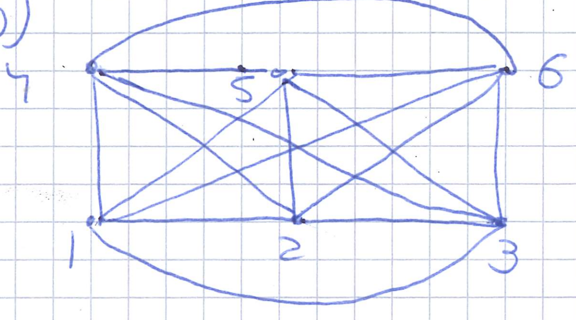
Så
(1) $e = \frac{3n}{2}$
(2) $2f = 4 + 3n$; $2y + 2x = 4 + 3n$
(3) $5x + 6y = 3n$; som ger

(+3 ggr rad 2 − rad 3) $x = 6n + 12$, och

$5x + 6y = 30n + 60 + 6y = 3n$ möjligt!!

Sådana grafer finns; t. ex dodekaedern!!

4b)



Grafen är K_6 och

$\chi(K_6) = 6$

5. Vi börjar med b)-delen. Frågan handlar hamiltonska grafer

För a)-delen vi kan använda satsen som säger att om en graf uppfyller att varje nod v har gradtal minst $\left\lfloor \frac{3n+1}{2} \right\rfloor$ (dvs $\frac{3n}{2}$ för jämna n, $\frac{3n+1}{2}$ för udda n) så är grafen hamiltonsk.

Nu $d_G(v) \geq 3n - n = 2n$ och $2n \geq \frac{3n}{2} \Leftrightarrow 4n \geq 3n$, så grafen är hamiltonsk

c) Enligt satsen ovan man kan ha högst $\left\lfloor \frac{3n-1}{2} \right\rfloor$