LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Milagros Izquierdo

Tentamen i Diskret Matematik, TATA32 (916G24), ETE373 TEN2, 2024–10–25, kl 08–13.

Inga hjälpmedel. Ej räknedosa. Fullständiga motiveringar krävs.

För betyg 3 behövs 15 poäng, för betyg 4, 20 poäng och 24 poäng för betyg 5, inklusive eventuella bonuspoäng.

---

1. Låt $a \geq 1$ vara ett fixerat heltal. Visa med Induktionsprincipen att för alla positiva heltal $n \geq 1$ gäller att $\sum_{k=0}^{n} \binom{k+a}{a} = \binom{n+1+a}{1+a}$. (Tips: $\binom{a}{a} = \binom{1+a}{1+a}$) (5p)

2. (a) På hur många olika sätt kan man måla HÖGST 21 lika jultomtar i fem (5) olika färger? (3p)

   (b) Visa att $\binom{26}{5} = \sum_{k=0}^{21} \binom{k+4}{4}$. (2p)

3. Dynamiken mellan två populationer i Norra Sverige (a_n) och Södra Sverige (b_n) ges av systemet av rekursiva ekvationer

$$\begin{cases} a_{n+1} = 0.8\,a_n + 0.4\,b_n \\ b_{n+1} = 0.2\,a_n + 0.6\,b_n \end{cases} \quad n \geq 0, \quad \text{med} \quad a_0 = 45, \quad b_0 = 55.$$

   (a) Ange rekursiva andragradsekvationer med begynnelsevillkor för a_n och b_n. (2p)

   (b) Ange explicita formler för a_n och b_n. (2p)

   (c) Finns någon jämvikt på sikt? (1p)

4. Betrakta mängden A av de 5040 permutationerna σ på 7 symboler. Vi definierar en relation $\mathcal{R}$ på A genom: $\sigma_1 \mathcal{R} \sigma_2$ om σ_1 och σ_2 har samma antal fixerade symboler.

   (a) Visa att $\mathcal{R}$ är en ekvivalensrelation. (3p)

   (b) Hur många permutationer innehåller ekvivalensklass av sådana permutationer som inte fixerar en enda symbol? Ange svar som heltal (2p)

5. Betrakta avbildningar $\mathcal{F} = \{f : A = \{1, 2, ..., 10\} \to B = \{1, 2, 3, 4\}\}$.

   (a) Hur många avbildningar finns i $\mathcal{F}$? Ange svar som heltal (1p)

   (b) Hur många av avbildningarna i $\mathcal{F}$ avbildar $1 \in A$ på $1 \in B$ and $2 \in A$ på $4 \in B$? Ange svar som heltal (1p)

   (c) Vi definierar en relation $\preceq$ på $\mathcal{F}$ genom: $f_1 \preceq f_2$ om för varje index $i \in A$, $f_1(i) \leq f_2(i)$. Visa att $\preceq$ är en partialordning. (3p)

   (d) Finns det minsta och största avbildningar? (1p)

   (e) Är $(\mathcal{F}, \preceq)$ en lattice? (1p)

6. Formulera och bevisa satsen om ekvivalens mellan begreppen bijektiv avbildning och inverterbar avbildning. (3p)

Svar TATA32/ETE373 (916G24) Diskret Matematik 25/10 2024

1) Visa med induktionsprincipen att $\sum_{k=0}^{n} \binom{k+a}{a} = \binom{n+1+a}{1+a}$ $\forall n \geq 1$ (a givet)

Vi visar i) För $n=1$ $\binom{a}{a}+\binom{a+1}{a} = \binom{a+1}{a+1}+\binom{a+1}{a} = \binom{a+2}{a+1}$ Sant.

Egenskap av binomial koeff

ii) Nu, anta att $\sum_{k=0}^{n} \binom{k+a}{a} = \binom{n+1+a}{1+a}$ och vi visar vad blir $\sum_{k=0}^{n+1} \binom{k+a}{a}$ Men

$$\sum_{0}^{n+1} \binom{k+a}{a} = \binom{n+1+a}{a} + \underbrace{\sum_{0}^{n} \binom{k+a}{a}}_{} \overset{\text{Ant}}{=} \binom{n+1+a}{a} + \binom{n+1+a}{a+1} \overset{\text{Egenskap binom. koeff}}{=} \binom{n+2+a}{1+a}$$

2)a) På hur många sätt kan man måla högst 21 lika jultomtar i fem olika färger? Vi letar efter antal icke-negativa heltalslösningar till $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 \leq 21$ $x_i \geq 0$, $1 \leq i \leq 5$. Inför en ny variabel $d \geq 0$ $(d = 21 - \sum_{i=1}^{5} x_i)$ Och vi vill ha antal lösningar (som ovan) till

$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+d = 21$; $x_i \geq 0$, $1 \leq i \leq 5$, $d \geq 0$

Det finns $\binom{21+6-1}{6-1} = \binom{26}{6}$ sådana lösningar

b) Om vi delar uppgiften i antal jultomtar att måla vi har 22 ekvationer $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = k$
$0 \leq k \leq 21$

För varje deluppgift har vi $\binom{k+5-1}{5-1} = \binom{k+4}{4}$ lösningar

Totalt (jämför med 2a))

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{21} \binom{k+4}{4}} = \binom{26}{6}$$

3) Betrakta Markov-kedjan
$$\begin{cases} (1)\; a_{n+1} = \frac{4}{5} a_n + \frac{2}{5} b_n \\ (2)\; b_{n+1} = \frac{1}{5} a_n + \frac{3}{5} b_n \end{cases}$$

a) Från (1) $b_n = \frac{5}{2} a_{n+1} - 2a_n$, $b_{n+1} = \frac{5}{2} a_{n+2} - 2a_{n+1}$

Sätt dem i (2) och få

$a_{n+2} - \frac{7}{5} a_{n+1} + \frac{2}{5} a_n = 0$ och likadant

b) $b_{n+2} - 7/5\, b_{n+1} + 2/5\, b_n = 0$ Med karakt. ekv

$r^2 - \frac{7}{5} r + \frac{2}{5} = 0$ och rötter $r_1 = 1$, $r_2 = \frac{2}{5}$

Ekv är $a_n = A_1 + A_2 \left(\frac{2}{5}\right)^n$; $b_n = B_1 + B_2 \left(\frac{2}{5}\right)^n$

$a_0 = 45$, $a_1 = 58$ | $b_0 = 55$, $b_1 = 42$

Så $\begin{cases} a_0 = 45 = A_1 + A_2 \\ a_1 = 58 = A_1 + \frac{2}{5} A_2 \end{cases}$ $\begin{cases} b_0 = 55 = B_1 + B_2 \\ b_1 = 42 = B_1 + \frac{2}{5} B_2 \end{cases}$

$\boxed{a_n = \frac{200}{3} - \frac{65}{3} \left(\frac{2}{5}\right)^n}$ $\boxed{b_n = \frac{100}{3} + \frac{65}{3} \left(\frac{2}{5}\right)^n}$

c) Beräkna $\begin{cases} \lim_{n \to +\infty} a_n = \frac{200}{3} \\ \lim_{n \to +\infty} b_n = \frac{100}{3} \end{cases}$ jämvikten på sikt

4) a) Vi definierar på $A = \{\sigma ; \sigma$ permutation av 7 symbol$\}$ en relation R som följer i $\sigma_1 R \sigma_2$ om σ_1 och σ_2 har samma antal fixerade symboler. R är

i) Reflexiv: $\forall \sigma \in A$, σ fixerar samma antal symboler som σ

ii) Symmetrisk: Om σ fixerar samma antal symboler som τ också τ fixerar samma antal symboler som σ

iii) Transitiv: Om σ_1 fixerar samma antal symboler som σ_2 och σ_2 fixerar samma antal symboler som σ_3; också σ_1 fixerar samma antal symboler som σ_3

Så är R är ekvivalensrelation

b) Permutationer som inte fixerar en enda symbol är derangemang. Det finns

$d_7 = \sum_{k=2}^{7} \frac{(-1)^k\, 7!}{k!} = 5040\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \frac{1}{720} - \frac{1}{5040}\right) = \underline{1854}$

5) Betrakta avbildningar $\mathcal{F} = \{f : A = \{1, \ldots, 10\} \to B = \{1, \ldots, 4\}\}$

a) Det finns $|\mathcal{F}| = (4)^{10} = (2^{10})^2 = 1048576$ avbildningar

b) bilderna på 1 och 2 är givna, så det finns
$(4)^8 = (2^8)^2 = 65536$

c) Vi definierar $\preccurlyeq$ på $\mathcal{F}$ som följer $f_1 \preccurlyeq f_2$ om för varje index $i \in A$ $f_1(i) \leq f_2(i)$. $\preccurlyeq$ är

i) Reflexiv: $\forall f \in \mathcal{F}$ $f(i) \leq f(i)$

ii) Antisymmetrisk: Om $f_1 \preccurlyeq f_2$ och $f_2 \preccurlyeq f_1$, har vi att för varje element $i \in A$ $\begin{cases} f_1(i) \leq f_2(i) \\ f_2(i) \leq f_1(i) \end{cases}$ så $f_1(i) = f_2(i)$

som betyder $\Leftrightarrow$ $f_1 = f_2$

iii) Transitiv: Om $f_1 \preccurlyeq f_2$ och $f_2 \preccurlyeq f_3$ har vi
För varje $i \in A$ $\begin{cases} f_1(i) \leq f_2(i) \\ f_2(i) \leq f_3(i) \end{cases}$, så $f_1(i) \leq f_3(i)$, dvs

$f_1 \preccurlyeq f_3$

d) Minsta avbildningen $f_{1,10}(i) = 1$, $1 \leq i \leq 10$
Största avbildningen $f_{4,10}(i) = 4$, $1 \leq i \leq 10$

e) $(\mathcal{F}, \preccurlyeq)$ är en lattice;

Givna f_1 och f_2 vi definierar avbildningarna
$s : A \to B$ $s(i) = \max\{f_1(i), f_2(i)\}$ och
$u : A \to B$ $u(i) = \min\{f_1(i), f_2(i)\}$

så $\begin{cases} \text{mob}\{f_1, f_2\} = s \\ \text{sub}\{f_1, f_2\} = u \end{cases}$