LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Milagros Izquierdo

Tentamen i Diskret Matematik, TATA32 (916G24), ETE373 TEN2, 2025–08–29, kl 14–19.

Inga hjälpmedel. Ej räknedosa. Fullständiga motiveringar krävs.

För betyg 3 behövs 15 poäng, för betyg 4, 20 poäng och 24 poäng för betyg 5, inklusive eventuella bonuspoäng.

---

1. Låt $0 < t < 1$. Visa att för alla naturliga tal n gäller att $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} = 1$. (5p)

2. (a) I en grupp med 200 studenter läser 50 st. matematik och 140 st. ekonomi, 24 studenter har både matte och ekonomi. Båda ämnena har tenta imorgon. Bara studenter som inte har tenta imorgon kommer till festen ikväll. Hur många studenter kommer till festen? (2p)

   (b) Vi vill veta hur många män som var på festen. Vi vet att 60 av de 200 studenterna var kvinnor, och att av dessa läser 20 matematik, 45 ekonomi och 16 båda två ämnena. (3p)

3. (a) På hur många sätt kan man välja 5 tal bland de 25 heltalen $1, 2, \ldots, 25$ så att summan av de valda talen blir udda? Bortse från ordning. (2p)

   (b) Vi väljer 40 positiva heltal, alla mindre än 1000. Visa att det finns minst 2 av dem vars differens är högst 25 (1p)

   (c) En fakultet har 48 manliga och 12 kvinnliga professorer. Fakulteten har som policy att minst en kvinnlig professor måste ingå i varje kommitté. Hur många olika kommitteer bestående av 12 professorer kan väljas? (2p)

4. (a) Talföljderna $\{a_n\}$ och $\{b_n\}$ definieras som antalet binära listor av längd $n \geq 1$ som inte innehåller 2 konsekutiva nollor och som slutar med 0 respektive 1. Visa att $\{a_n\}$ och $\{b_n\}$ uppfyller

$$\begin{cases} a_{n+1} &= b_n \\ b_{n+1} &= a_n + b_n \end{cases} \qquad (2p)$$

   (b) Lös systemet ovan. Självklart är $a_1 = b_1 = 1$. (3p)

5. Betrakta alla punkter i 3D-rummet $\mathbb{R}^3$ och den fixerade punkten $C = (1,1,1) \in \mathbb{R}^3$. Vi definierar en relation $\mathcal{R}$ på punkterna som följer: givet två punkter P, Q säger vi att $P\mathcal{R}Q$ om $d(P,C) = d(Q,C)$, där d är euklidiska avståndet mellan två punkter i 3D-rummet.

   (a) Visa att $\mathcal{R}$ är en ekvivalensrelation. (3p)

   (b) Visa att mängden av ekvivalensklasser är intervallet $[0, +\infty) = \{d;\ 0 \leq d < \infty\}$. (1p)

   (c) Givet $d \neq 0$ som ger en ekvivalensklass. Beskriv klassen geometriskt. (1p)

   (d) Betrakta funktionen $f : \mathbb{R}^3 \to [0, +\infty)$ given genom $f(x,y,z) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2\ (= c)$. Visa att varje ekvivalensklass i (c) är en nivåyta för f. Vad är sambandet mellan parametern d i (b) och nivån c i denna deluppgift? (2p)

6. Formulera och bevisa resultatet om *Existensen av minimala och maximala element i en icke-tom ändlig pomängd.* (3p)

Svar Diskret matematik TATA32/ETE373 TEN2 29/8 2025

1) Låt $0 < t < 1$. Visa att för alla naturliga tal n gäller att $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} = 1$.

Alt 1 Binomialsatsen:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} = (t+1-t)^n = (1)^n = 1.$$

Alt 2 IP: i) För $n=0$ $\sum_{0}^{0} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{0-i} = (1)(1)(1) = 1$

ii) Vi antar att för udgd $n \geq 0$ $\sum_{i}^{n} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} = 1$

Och visar för $n+1$

$$\sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} t^i (1-t)^{n+1-i} = \underbrace{\binom{n+1}{0}}_{=\binom{n}{0}} t^0 (1-t)^n (1-t) + \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\binom{n+1}{i}}_{\binom{n}{i}+\binom{n}{i-1}} t^i (1-t)^{n-i} (1-t) + \underbrace{\binom{n+1}{n+1}}_{\binom{n}{n}} t^{n+1} (1-t)^0$$

$$= \binom{n}{0} t^0 (1-t)^n (1-t) + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} (1-t) + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} t\, t^j (1-t)^{n-j} + \binom{n}{n} t\, t^n (1-t)^0 =$$

Obs $j = i-1$, $n+1-i = n-(j-1) = n-j$

$$= (1-t) \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} + t \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} t^j (1-t)^{n-j}$$

Antagand 2ggr

$$(1-t)(1) + t(1) = 1 - t + t = 1.$$

2a) $|U| = 200$ $|M| = 50$, $|E| = 140$, $|M \cap E| = 24$

Så $|\overline{M \cup E}| = 200 - 50 - 140 + 24 = 34$ st

2b) Alt 1: Kvinnor på festen är

$|\overline{(k \cap M) \cup (k \cap E)}| = |k| - |k \cap M| - |k \cap E| + |k \cap M \cap E|$

$= 60 - 20 - 45 + 16 = \underline{11\text{ st}}$ Så men på festen är $34 - 11 = \underline{23\text{ st}}$

Alt 2 Vi letar efter $|\overline{k \cup M \cup E}| = 200 - 50 - 140 - 60 + 24 + 20 + 45 - 16 = \underline{23\text{ st}}$

3a) Vi väljer $1 \le t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < t_5 \le 25$ sådan att $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 \equiv 1 \mod 2$. Vi har att ett av följande fall gäller:

i) 1 udda tal : $\binom{12}{4}\binom{13}{1}$ — 13 udda tal, 12 jämna tal

ii) 3 udda tal : $\binom{12}{2}\binom{13}{3}$

iii) 5 udda tal : $\binom{12}{0}\binom{13}{5}$ Totalt:

$$\binom{12}{4}\binom{13}{1} + \binom{12}{2}\binom{13}{3} + \binom{12}{0}\binom{13}{5}$$

3b) Med duvslagsprincipen: om alla differenser är minst 26 då har vi att största heltalet som väljs måste vara minst

$$1 + (39)(26) = 1 + 1014 = 1015 \not> 1000$$

minsta man kan välja — omöjligt

3c) Med komplementet: Antal kommittér är: $\binom{60}{12}$. Antal kommittér med endast men $\binom{48}{12}$. Så $\binom{60}{12} - \binom{48}{12}$

4: a_n: antal binära listor av längd $n \ge 1$ som inte innehåller 2 konsekutiva 0:or och slutar med 0, b_n: antal binära listor av längd $n \ge 1$ som inte innehåller 2 kons. 0:or och slutar med 1. Så:

ai) För a_{n+1}: näst sista siffra är 1, dvs varje lista typ a av längd $n+1$ kommer från precis en lista typ b av längd n dvs $\underline{a_{n+1} = b_n}$

aii) För b_{n+1}: Varje lista av typ b av längd n+1 kan komma från en lista typ a av längd n eller en lista typ b av längd n eftersom att tillägga en 1:a går inte mot villkoren

så $\underline{b_{n+1} = a_n + b_n}$

b) $\begin{cases} a_{n+1} = b_n & (a_{n+2} = b_{n+1},\ a_n = b_{n-1}) \\ b_{n+1} = a_n + b_n; & a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0 \\ a_1 = b_1 = 1 & b_{n+1} - b_n - b_{n-1} = 0 \end{cases}$

Lös $a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$; $a_1 = 1$, $a_2 = 1$. Vi ser att den är ekvationen och begynnelse villkor för Fibonaccital. $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

Eftersom $b_n = a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$

Men vi löser igen:

kar ekv blir $r^2 - r - 1 = 0$ $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$a_n = A_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + A_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

BV $\begin{cases} 1 = A_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + A_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \\ 1 = A_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + A_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 \end{cases}$ så

$1 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = A_1\, 0 + A_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$

$\cancel{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} = A_2\,\cancel{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}(-\sqrt{5})$; $\boxed{A_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}}$

$A_1 = \left(\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(2 + \frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{(1+\sqrt{5})}\frac{(1+\sqrt{5})}{\sqrt{5}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{5}}}$

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \\ b_n = a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \end{cases}$$

5) En relation R på punkter i rymden ges av $P R Q$ om $d(P,C) = d(Q,C)$ där C fixed $C = (1,1,1)$.

a) R är en ekvivalensrelation:

i) R reflexiv eftersom för varje punkt P i $\mathbb{R}^3$
$$d(P,C) = d(P,C)$$

ii) R symmetrisk eftersom givna punkter P, Q i $\mathbb{R}^3$ $d(P,C) = d(Q,C)$ om och endast om $d(Q,C) = d(P,C)$

iii) transitiv eftersom om $P R Q$ och $Q R Z$ vi har att $d(P,C) = d(Q,C) = d(Z,C)$ och
$$d(P,C) = d(Z,C).$$

b) Varje ekvivalensklass består av ett givet avstånd till C så varje ekvivalensklass är ett tal d i intervallet $[0, +\infty)$

c) Om $d \neq 0$, ekvivalensklassen given by d består av alla punkter P i $\mathbb{R}^3$ som har avstånd d till $(1,1,1)$, så den är en sfär med centrum C och radie d

d) Ekvationen för en sfär med centrum C och radie d ges av $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 = d^2$
Så ekvivalensklassen, sfären är en nivåyta för funktionen $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2$ och nivån c är radie i kvadrat
$$c = d^2$$