LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Milagros Izquierdo

Tentamen i Diskret Matematik, TATA32 (916G24), TEN1, 2021–01–16, kl 08–13.

Inga hjälpmedel. Ej räknedosa. Fullständiga motiveringar krävs.

För betyg 3 behövs 20 poäng, för betyg 4, 26 poäng och 32 poäng för betyg 5, inklusive eventuella bonuspoäng.

---

1. Visa att för alla naturliga tal $n \geq 0$ gäller att $\sum_{k=0}^{n}(k^2+3k+2) = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{3}$.

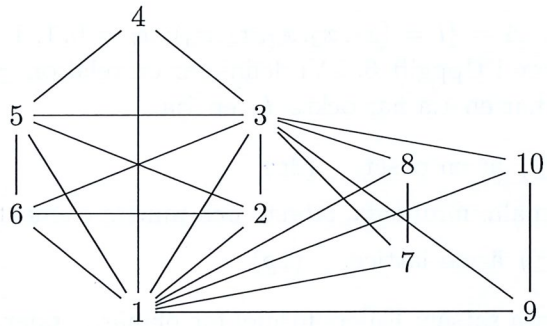
   (5p)

2. Nätverket Mattea består av tio medlemmar med förbindelser som i grafen G nedan:

   (a) Medlem nr. 1 vill sprida ett meddelande genom att meddelandet överförs från en medlem till en granne i näverket på så sätt att varje medlem får meddelandet precis en gång och medlem nr. 1 får tillbaka meddelandet efter att alla har fått det. Är det möjligt? Motivera svaret. (2p)

   (b) Är grafen G planär? Motivera svaret. (1p)

   (c) Bestäm kromatiska talet till G. När medlemmar vill kommunicera med omvärlden behöver grannarna använda olika kanaler, annars blir det olyckliga interferenser. Hur många kanaler behövs för hela nätverket? Motivera svaret. (2p)



3. Hur många permutationer av siffrorna 1, 2, 3, 4, 5 och 6 uppfyller att siffran 2 inte är på plats 2, siffran 4 inte är på plats 4, och siffran 6 inte är på plats 6? (5p)

4. (a) Bestäm heltalen mellan 1156 och 1925 som är kongruenta med $(78)^{1124}$ modulo 385. (3p)

   (b) Bestäm lösningar, om de existerar, av $x^2+3x+5=0 \mod(13)$. (2p)

5. Väder-institutet (VI) modellerar med en Markov-kedja prognosen om vädret blir soligt eller regnigt. Man har följande modell för att se hur väder varierar med tiden: En solig dag (s_n) följs med sannolikhet 75% av en solig dag (s_{n+1}) och en regnig dag (r_n) följs med sannolikhet 65% av en regnig dag (r_{n+1}).

   (a) Ange ekvationer för modellen (1p)

   (b) Lös systemet av rekursiva ekvationer när $s_0 = 50\%$, $r_0 = 50\%$. (3p)

   (c) Vad är sannolikheten att vädret på sikt blir soligt? och regnigt? (1p)

VÄND

LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Milagros Izquierdo

Tentamen i Diskret Matematik, TATA32 (916G24), TEN1, 2021–01–16, kl 08–13.

Inga hjälpmedel. Ej räknedosa. Fullständiga motiveringar krävs.

För betyg 3 behövs 20 poäng, för betyg 4, 26 poäng och 32 poäng för betyg 5, inklusive eventuella bonuspoäng.

---

6. Betrakta mängden $A = \{l = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5);\ x_i = 0, 1,\ 1 \leq i \leq 5\}$ bestående av binära listor av längd 5.

   (a) Bestäm antalet avbildningar $f : A \to \{0, 1\}$. (1p)

   (b) Bestäm antalet avbildningar $f : A \to \{0, 1\}$ som uppfyller att om $l = (x_1, x_2, x_3, x_4, 0)$ är en lista som slutar med 0 så är $f(l) = 0$. (1p)

   (c) Bestäm antal avbildningar $f : A \to \{0, 1\}$ som uppfyller att om $l = (1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ är en lista som börjar med 1 så är $f(l) = 0$. (1p)

   (d) Bestäm antal avbildningar $f : A \to \{0, 1\}$ som uppfyller att om $l = (1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ är en lista som börjar med 1 så är $f(l) = 0$ eller om $l = (1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ är en lista som börjar med 1 så är $f(l) = 0$. (1p)

   (e) Finns det funktioner $f : A \to \{0, 1\}$ som uppfyller att om $l = (x_1, x_2, x_3, x_4, 0)$ är en lista som slutar med 0 så är $f(l) = 0$ och om $l = (1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ är en lista som börjar med 1 så är $f(l) = 1$? (1p)

7. Betrakta mängden $A = \{l = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5);\ x_i = 0, 1,\ 1 \leq i \leq 5\}$ bestående av binära listor av längd 5 som i Uppgift 6. . Vi definierar en relation $\preceq$ på A genom: $l_1 \preceq l_2$ om på varje plats där l_1 har en 1:a har också l_2 en 1:a.

   (a) Visa att $(A, \preceq)$ är en poset. (2p)

   (b) Bestäm maximala, minimala, största och minsta element i $(A, \preceq)$, om de finns. (1p)

   (c) Visa att $(A, \preceq)$ är en lattice. (1p)

8. Formulera och bevisa satsen: Eulers formel för planära grafer. (5p)

Svar TATA32 (916G24) Diskret matematik 16/1 2021

1) Visa att $\sum_{k=0}^{n}(k^2+3k+2) = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{3}$, för alla $n \geq 0$

Vi visar med IP så vi visar

i) Påstående sant för $n=0$ $\sum_{0}^{0} 2 = \frac{(1)(2)(3)}{3} = 2$ Sant

ii) Antag att $\sum_{k=0}^{p}(k^2+3k+2) = \frac{(p+3)(p+2)(p+1)}{3}$ för något $p \geq 0$.

Vi visar att formula gäller också för $p+1$:

$$\sum_{k=0}^{p+1}(k^2+3k+2) = \underbrace{\sum_{k=0}^{p}(k^2+3k+2)}_{\text{Antagande}} + (p+1)^2+3(p+1)+2 =$$

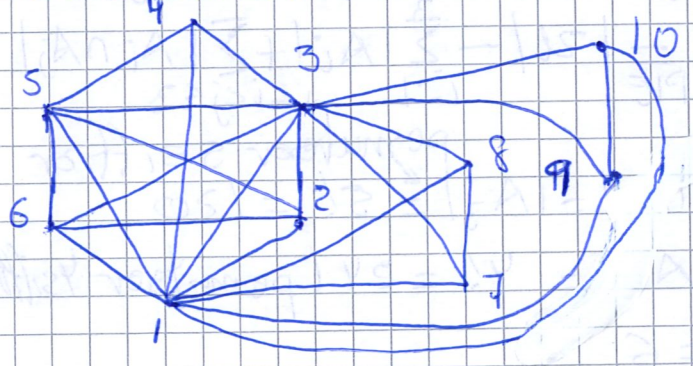
$$\frac{(p+3)(p+2)(p+1)}{3} + (p+1)^2+3(p+1)+2 = \frac{(p+3)(p+2)(p+1)}{3} +$$

$$+ p^2+5p+6 = \frac{(p+3)(p+2)(p+1)}{3} + \frac{3(p+2)(p+3)}{3} =$$

$$= \frac{(p+2)(p+3)(p+1+3)}{3} = \frac{(p+1+1)(p+1+2)(p+1+3)}{3} = HL_{p+1}$$

V.S.V.

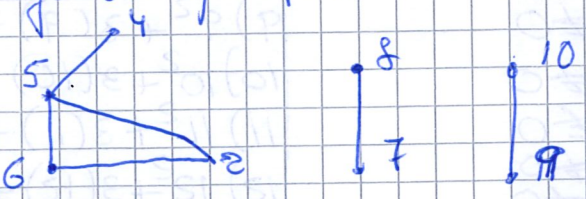
2) Betrakta nätverkslänkar (diagrammet)



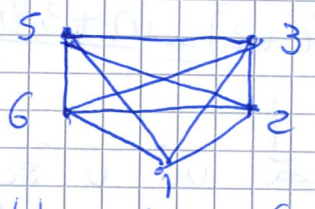
(a) Att sprida meddelande så att meddelande går från 1, passerar exakt en gång varje nod/medlem och tillbaka till 1 är att säga att grafen är hamiltonsk.

Grafen är INTE hamiltonsk ty om vi tar bort noderna 1 och 3 (med kringliggande kanter) får vi en osammanhängande graf med 3 komponenter och $3 \geq 2+1$

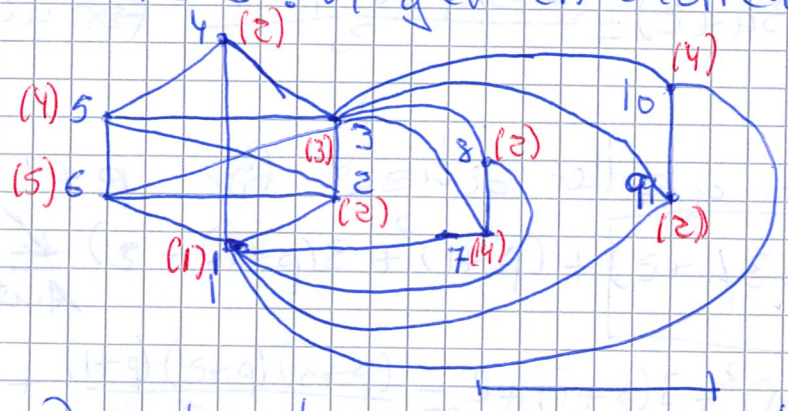
Resultat-graf:



b) Grafen är inte planär ty den innehåller K_5 som en delgraf



c) Eftersom K_5 delgraf $\chi(G) \geq \chi(K_5) = 5$.
$\chi(G) = 5$. Vi ger en (korrekt) färgning med 5 färger



. Nätverket behöver minst 5 kanaler

3) Betrakta $\mathcal{U}$ = {permutationer av 1,2,3,4,5,6}
och betrakta delmängder A_1 = {perm i $\mathcal{U}$ med 2 fixerad}
A_2 = {perm i $\mathcal{U}$ som fixerar 4}
A_3 = {perm i $\mathcal{U}$ som fixerar 6}
Vi letar efter $|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3| = |\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}| =$
$= |\mathcal{U}| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| \underset{PIE}{=} |\mathcal{U}| - \sum_{i=1}^{3} |A_i| + \sum_{1 \leq i < j \leq 3} |A_i \cap A_j|$
$- |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$

permuterar 5 siffror

Nu $|\mathcal{U}| = 6! = 720$; $|A_1| = |A_2| = |A_3| = 5! = 120$
$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = 4! = 24$ (permuterar 4 siffror)
och $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3! = 6$
So $|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3| = 720 - (3)(120) + 3(24) - 6 = 426$ sådana permut.

4b) Möjlig lösning av $x^2 + 3x + 5 \equiv 0 \mod (13)$ uppfyller
ekv: 0) $0^2 + 3(0) + 5 \not\equiv 0$
1) $1^2 + 3(1) + 5 \not\equiv 0$
2) $2^2 + 3(2) + 5 \not\equiv 0$
3) $3^2 + 3(3) + 5 \not\equiv 0$
4) $4^2 + 3(4) + 5 \not\equiv 0$
5) $5^2 + 3(5) + 5 \not\equiv 0$
6) $6^2 + 3(6) + 6 \not\equiv 0$
7) $7^2 + 3(7) + 5 \not\equiv 0$
8) $8^2 + 3(8) + 5 \not\equiv 0$
9) $9^2 + 3(9) + 5 \not\equiv 0$
10) $10^2 + 3(10) + 5 \equiv (-3)^2 + 4 + 5 \equiv 5 \not\equiv 0$
11) $11^2 + 3(11) + 5 \equiv 4 - 6 + 5 \not\equiv 0$
12) $12^2 + 3(12) + 5 \equiv (-1)^2 - 3 + 5 \not\equiv 0$

Ingen lösning

4a) För att beräkna talet x sådant att $x \equiv 78^{1124} \bmod 385$ vi kan använda KRS och hitta

$$\left.\begin{aligned} x &\equiv b_1 \bmod 5 \\ x &\equiv b_2 \bmod 7 \\ x &\equiv b_3 \bmod 11 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &385 = (5)(7)(11) \text{ och} \\ &\gcd(5,7) = \gcd(5,11) = \gcd(7,11) = 1 \end{aligned}$$

Först $x \equiv 78^{1124} \equiv b_1 \bmod 5$

Fermats lilla sats

$78^{1124} \equiv 3^{1124} \equiv (3^4)^{281} \equiv 1^{281} \bmod 5 \implies b_1 = 1$

$78^{1124} \equiv 1^{1124} \bmod 7 \implies b_2 = 1$

$78^{1124} \equiv 1^{1124} \bmod 11 \implies b_3 = 1$

Nu, med KRS $x \equiv b_1 N_1 x_1 + b_2 N_2 x_2 + b_3 N_3 x_3 \bmod 385$

där $N_1 = 385/5 = 77$, $N_2 = 385/7 = 55$, $N_3 = 385/11 = 35$;

x_1: $77x_1 \equiv 1 \bmod 5$
$2x_1 \equiv 1 \bmod 5$
$x_1 \equiv 3 \bmod 5$

x_2: $55x_2 \equiv 1 \bmod 7$
$-x_2 \equiv 1 \bmod 7$
$x_2 \equiv -1 \bmod 7$

x_3: $35x_3 \equiv 1 \bmod 11$
$2x_3 \equiv 1 \bmod 11$
$x_3 \equiv 6 \bmod 11$

$$x \equiv \overset{b_1}{(1)}(77)(3) + \overset{b_2}{(1)}(55)(-1) + \overset{b_3}{(1)}(35)(6) \equiv 1 \bmod 385$$

Talen vi leter efter ligger mellan 1156 och 1925 så

Svar $x_1 = 1 + (3)(385) = 1 + 1155 = \underline{1156}$

$x_2 = 1 + (4)(385) = 1 + 1540 = \underline{1541}$

5) Markov-kedja a)

$$\begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix} \begin{pmatrix} s_{n+1} \\ r_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15/20 & 7/20 \\ 5/20 & 13/20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_n \\ r_n \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} s_0 &= 1/2 \\ r_0 &= 1/2 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} (1)\ s_{n+1} &= \frac{15}{20} s_n + \frac{7}{20} r_n \\ (2)\ r_{n+1} &= \frac{5}{20} s_n + \frac{13}{20} r_n \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\text{Från (2) } s_n = \frac{20}{5} r_{n+1} - \frac{13}{5} r_n \\ &s_{n+1} = \frac{20}{5} r_{n+2} - \frac{13}{5} r_{n+1} \end{aligned}$$

Sätt i (1)

$$\boxed{\begin{aligned} r_{n+2} - \frac{7}{5} r_{n+1} + \frac{2}{5} r_n &= 0 \\ s_{n+2} - \frac{7}{5} s_{n+1} + \frac{2}{5} s_n &= 0 \end{aligned}}$$

likadant $r_0 = 1/2$, $s_0 = 1/2$

b) Som alla Markov-kedjor rätter till karakteristiska ekvationen $r^2 - \frac{7}{5} r + \frac{2}{5} = 0$ är $r_1 = 1$, $r_2 = \frac{2}{5} = 0{,}4$

lösningar är $s_n = A_1(1)^n + A_2(2/5)^n$, $s_0 = \frac{1}{2}$, $s_1 = \frac{11}{20}$

$r_n = B_1(1)^n + B_2(2/5)^n$, $r_0 = \frac{1}{2}$, $r_1 = 9/20$

så $\begin{cases} A_1 + A_2 = \frac{1}{2} \\ A_1 + \frac{2}{5}A_2 = \frac{11}{20} \end{cases}$ | $\begin{cases} B_1 + B_2 = 1/2 \\ B_1 + \frac{2}{5}B_2 = 9/20 \end{cases}$

$\underline{s_n = \frac{7}{12}(1)^n - \frac{1}{12}\left(\frac{2}{5}\right)^n}$ | $r_n = \frac{5}{12}(1)^n + \frac{1}{12}\left(\frac{2}{5}\right)^n$

c) På sikt, dvs $n \to \infty$, blir sannolikheten för soligt väder $\frac{7}{12}$ och sannolikheten för regnigt väder $\frac{5}{12}$

6) $A = \{$binära listor av längd 5$\}$, $|A| = 32$

a) Avbildningar $f: A \to \{0,1\}$: $f(l) = 0$ eller $f(l) = 1$ så det finns 2^{32} sådana avbildningar

c, b) Eftersom 16 listor går till 0 och 16 listor kan gå till 0 eller 1 är svar för b) och c) 2^{16}, bägge fall

d) är samma fråga som c) och samma svar 2^{16}

e) Det finns INTE funktioner som uppfyller alt $f(x_1, x_2, x_3, x_4, 0) = 0$ och $f(1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 1$. Ej definierade i t.ex $l = (\underline{1}, 0, 1, 1, \underline{0})$

7) $A = \{$binära listor av längd 5$\}$, $\preceq$ definieras $l_1 \preceq l_2$ om varje 1:a i l_1 finns i l_2

(a) i) $\preceq$ reflexiv: $l \preceq l$ $\forall l \in A$ ty varje 1:a i l finns i l

ii) $\preceq$ antisymmetri: Om $l_1 \preceq l_2$ och $l_2 \preceq l_1$ varje 1:a i l_1 är i l_2 och varje 1:a i l_2 är i l_1 $\iff l_1 = l_2$

iii) $\preceq$ transitiv: Om $l_1 \preceq l_2$ och $l_2 \preceq l_3$ då varje 1:a i l_1 är också i l_2 och i l_3 så $l_1 \preceq l_3$

$\boxed{(A, \preceq) \text{ poset}}$

7b) Minimal och minsta element är

$$\ell_0 = (0,0,0,0,0)$$

Maximal och största element är

$$\ell_1 = (1,1,1,1,1)$$

7c) $(A, \preceq)$ är en Lattice:

Betrakta ett par av listor

$\ell = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ och $\ell' = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$

och betrakta $s = (s_1, s_2, s_3, s_4, s_5)$ som har ettor i positioner där <u>ℓ och ℓ' har ettor samtidigt</u>

och $m = (m_1, m_2, m_3, m_4, m_5)$ som har ettor i positioner där <u>ℓ eller ℓ'</u> har ettor

Nu $s = \text{sup}\{\ell, \ell'\}$ och $m = \text{mob}\{\ell, \ell'\}$

~~dvs~~ $(A, \preceq)$ en Lattice