Några berömda 1900-talsmatematiker

Hans Lundmark, MAI

TATA40 Matematiska utblickar

(feb 2025)

Några viktiga årtal under 1900-talet

- Första världskriget 1914–1918.
- Ryska revolutionen 1917. Sovjetunionen 1922.
- Hitler rikskansler i Tyskland januari 1933.
- Andra världskriget 1939–1945.

David Hilbert (1862–1943)

- Född i Königsberg, Preussen. Fadern domare.
- Började på univ. i Königsberg 1880.
- Doktorsavhandling 1885 (**invariantteori**).
- Studieresa 1885–86, bl.a. Paris.
- *Habilitation* i Königsberg. Arbete som *Privat-dozent*, senare *Extraordinarius* (≈ bitr. prof.).
- Professor i **Göttingen** från 1895 till sin död.
- Välkänd redan på 1890-talet. Mycket berömt föredrag på den andra internationella matematikerkongressen i Paris år 1900 (”Hilberts 23 problem”).
- Betraktades (och betraktas fortfarande) som den mest framstående matematikern under det tidiga 1900-talet, särskilt efter att **Henri Poincaré** (1854–1912) dött.

(Alla foton är hämtade från Wikimedia Commons.)

- Studiekamrat på universitetet, och vän för livet, med **Hermann Minkowski** (1864–1909).

  Främst **talteoretiker**. Underbarn. Vann Franska vetenskapsakademins *Grand Prix des Sciences Mathematiques* vid 18 års ålder 1883.

  Även känd för **Minkowskirummet**, geometrin hos rumtiden i Einsteins speciella relativitetsteori:

  $$\langle \mathbf{R}^4, c^2 t_1 t_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2 - z_1 z_2 \rangle.$$

  Professor vid tekniska högskolan i Zürich 1896. Hade Einstein som student där.

  Professor i Göttingen 1902. Dog tragiskt av brusten blindtarm vid 44 års ålder.

- Varje eftermiddag kl. 17 gick Hilbert och Minkowski tillsammans med deras lärare **Adolf Hurwitz** (1859–1919) på promenad ”till äppelträdet” och pratade matematik.

Göttingen

- Hilbert blev 1895 professor i Göttingen (där Gauss och Riemann var verksamma tidigare).

- Hilbert och **Felix Klein** (1849–1925) gjorde Göttingen till ett ledande centrum för matematik, i klass med Paris och Berlin.

  Hermann Minkowski, Richard Courant, Emmy Noether, Hermann Weyl, John von Neumann, Edmund Landau, Paul Bernays, Ernst Zermelo, Alonzo Church, Hugo Steinhaus, Carl Runge, Emanuel Lasker, m.fl.

- Även många framstående teoretiska fysiker arbetade i Göttingen.

  Ludwig Prandtl, Peter Debye, Max Born, Werner Heisenberg, Wolfgang Pauli, Eugene Wigner, Pascual Jordan, Paul Ehrenfest, Edward Teller, Robert Oppenheimer, m.fl.

- Allt raserades 1933, då nazisterna avskedade alla judar. Många forskare flydde landet, ofta till USA eller Kanada.

- Hilbert blev kvar. Dog obemärkt 1943 under andra världskriget. (Känt för omvärlden först flera månader efteråt.)

Hilberts matematiska perioder

- **Invariantteori** (1884–93)

  Doktorsavhandlingen. Hilberts bassats. (Icke-konstruktiv lösning till **Gordans problem**. Gordan: ”Das ist nicht Mathematik. Das ist Theologie.”) Hilberts nollställessats.

- **Förenklade bevis för att** e **och** π **är transcendenta** (1893)

- **Algebraisk talteori** (1893–98)

  Hilberts ”*Zahlbericht*”: *Die Theorie der algebraischen Zahlkörper* (1897). Klasskroppsteori.

- **Geometrins axiomatiska grundvalar** (1898–99)

  Grundlagen der Geometrie (1899). Uppdaterad axiomatisk version av Euklides geometri, med nutida krav på stringens.

- **Variationskalkyl/potentialteori** (1899)

  Rättfärdigande av **Dirichlets princip**: ”Lösningen till Laplaces ekvation med givna randvärden är den funktion som minimerar energin.” (Hur vet man att det *finns* en sådan minimerare?)

- **Integralekvationer** (1900–)

  Inspirerat av arbeten av **Ivar Fredholm** (1866–1927), son till Aseas grundare Ludvig Fredholm. Ledde till begreppet **Hilbertrum**.

- **Matematisk fysik** (1912–)

  Relativitetsteori. Kvantmekanik. *Methoden der mathematischen Physik* (1924), välkänd bok ihop med **Richard Courant** (1888–1972).

- **Metamatematik & matematisk logik** (ICM 1904; 1917–)

  Hilberts program: att konstruera en motsägelsefri och fullständig logisk axiomatisering av all matematik.

  Förespråkade **formalism**: reducera matematiken till ”meningslös” stränghantering, för att bl.a. rättfärdiga kontroversiella resonemang om oändliga mängder.

  På kollisonskurs med holländaren **L. E. J. Brouwer** (1881–1966), vars filosofi kallas **intuitionism**.

Hilberts 23 problem

- Hilbert bjöds in att tala vid den andra **internationella matematiker-kongressen** i Paris år 1900.

  (Den första ägde rum 1897 i Zürich. Hålls vart fjärde år fortfarande.)

- Minkowski föreslog att han skulle prata om viktiga olösta problem.

  En lista på 10 stycken problem presenterades i Paris.

  Utökades till 23 problem i den senare publicerade versionen.

Mathematische Probleme.

Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Kongreß zu Paris 1900.

Von

D. Hilbert.

Wer von uns würde nicht gern den Schleier lüften, unter dem die Zukunft verborgen liegt, um einen Blick zu werfen auf die bevorstehenden Fortschritte unsrer Wissenschaft und in die Geheimnisse ihrer Entwickelung während der künftigen Jahrhunderte! Welche besonderen Ziele werden es sein, denen die führenden mathematischen Geister der kommenden Geschlechter nachstreben? welche neuen Methoden und neuen Thatsachen werden die neuen Jahrhunderte entdecken — auf dem weiten und reichen Felde mathematischen Denkens?

- Den tyske läkaren Emil du Bois-Reymond hade hävdat att vissa ”transcendenta” problem, t.ex. materiens och krafternas innersta väsen, låg bortom människans vetande:

  ”Ignoramus et ignorabimus.”
  (”Vi vet inte, och vi kommer inte att få veta.”)

- Men Hilbert säger i sitt föredrag:

  ”Denna övertygelse om att varje matematiskt problem är lösbart är en kraftig sporre för oss under arbetet; vi hör inom oss den ständiga maningen: *Där är problemet, sök lösningen. Du kan finna den med rent tänkande, för i matematiken finns inget ignorabimus!*”

- Ett annat berömt Hilbertcitat, från ett radiosänt tal 1930 (står även på hans gravsten):

  ”Wir müssen wissen. Wir werden wissen.”
  (”Vi måste få veta. Vi kommer att få veta.”)

Problem 1: Cantors problem om kontinuums mäktighet

Kontinuumhypotesen (CH) säger att det inte finns någon kardinalitet mellan $\mathrm{card}(\mathbf{N}) = \aleph_0$ och $\mathrm{card}(\mathbf{R}) = \mathfrak{c}$.

Med andra ord, en överuppräknelig delmängd av **R** (de reella talen, ”kontinuum”) måste ha samma kardinalitet (”mäktighet”) som **R**.

Är detta sant eller falskt?

- Kurt Gödel (1940):

  ZFC + CH är motsägelsefritt (om ZCF är det).

  (**ZFC** betyder **Zermelo–Fraenkel**-axiomen för mängdlära med tillägg av urvals-axiomet, *Axiom of **Choice***.)

- Paul Cohen (1963):

  ZFC + ($\neg$ CH) är också motsägelsefritt (om ZCF är det).

Dvs. CH är *oavgörbar* utifrån ZFC-axiomen!

Problem 8: Primtalsproblem

- **Riemannhypotesen**: Alla icketriviala komplexa nollställen till Riemanns ζ-funktion har realdel $\frac{1}{2}$.
- **Goldbachs förmodan**: Varje jämnt heltal ≥ 4 är summan av två primtal.
- Det finns oändligt många **primtalstvillingar**: $(3,5)$, $(5,7)$, $(11,13)$, $(17,19)$, $(29,31)$, $(41,43)$, $(59,61)$, $(71,73)$, $\ldots$

Är dessa påståenden sanna eller falska? Ännu okänt!

Vissa framsteg har dock gjorts nyligen angående primtalstvillingar:

- **Yitang Zhang** visade 2013 att det finns något $k \leq 70\,000\,000$ sådant att det finns oändligt många primtal som skiljer sig med exakt k.
- Det internetbaserade samarbetsprojektet **Polymath8** (under ledning av **Terry Tao**) förbättrade detta till $k \leq 246$ året därpå.

  (Målet är förstås att komma ner till $k = 2$.)

Problem 10: Avgörande av lösbarheten hos en diofantisk ekvation

Mål: Hitta en procedur som avgör i ändligt många steg om ekvationen

$$p(x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

där p är ett polynom vars koefficienter är heltal, har några lösningar som är heltal.

Flera decenniers samlade ansträngningar (**Martin Davis**, **Julia Robinson**, **Hilary Putnam**, **Yuri Matiyasevich**, m.fl.) utmynnade 1970 i ett bevis för att det **inte finns** någon sådan algoritm.

Mer om sådana **oberäkningsbara** problem i avsnittet om **Alan Turing** nedan.

(Constance Reid, syster till Julia Robinson, har f.ö. skrivit välkända biografier över David Hilbert, Richard Courant & Julia Robinson.)

Emmy Noether (1882–1935)

- Dotter till Max Noether, matematiker i Erlangen, Tyskland. Judisk familj.
- Tre yngre bröder med tragiska öden.

  (Mellanbrodern Fritz, också matematiker, flydde från nazisterna till Sovjetunionen 1937, men blev avrättad för ”antisovjetisk verksamhet” 1941.)
- Kvinnor hade ”inofficiellt” rätt att läsa på universitet, om professorn för kursen gav sitt tillstånd. Läste matematik i Erlangen, och även en termin i Göttingen.
- Doktorerade 1907 i Erlangen inom invariantteori av klassiskt snitt för **Paul Gordan** (1837–1912), ”invarianternas konung”.

  (Gigantiska uträkningar av invarianter för ”ternära kvartiska former”, homogena fjärdegradspolynom i 3 variabler.)
- *Habilitation* tilläts inte för kvinnor. Stannade i Erlangen och hjälpte sin far. Publicerade uppmärksammade matematiska arbeten.

- Till Göttingen 1915 (under första världskriget) för att hjälpa Hilbert med vissa invariantteoretiska frågor i speciella relativitetsteorin.
- Bevisade **Noethers sats** om sambandet mellan **rörelsekonstanter** och **symmetrier** i teoretisk mekanik.
  (Translationsinvariant system $\implies$ rörelsemängden bevaras, osv.)
- *Habilitation* 1919 och jobb som *Privatdozent*, efter lång kamp från Klein och Hilbert. Innan dess hade Hilbert låtit henne få föreläsa genom att annonsera hennes kurser under sitt eget namn.
- Pionjär inom modern **abstrakt algebra**, bl.a. **ringteori**, där begreppet **noethersk ring** är fundamentalt.
- Gavs aldrig någon riktig tjänst vid universitetet, utan fick hanka sig fram. Flyttade till USA 1933.
- Jobb på Bryn Mawr College, ett college för kvinnor i Pennsylvania. Föreläste på Institute of Advanced Study i Princeton.
- Avled oväntat 1935 av komplikationer efter en tumöroperation.

Kurt Gödel (1906–1978)

- Tidernas mest framstående logiker.
- Född i Brünn, Österrike-Ungern.

  Nuvarande Brno, Tjeckien.
- Hade bemästrat universitetsmatematiken redan när han gick ut gymnasiet.

  Det ryktades även att han inte hade gjort ett enda grammatikfel på latin under hela skoltiden!
- Började på universitetet i Wien 1923.
- Flyttade till USA 1940 (Institute of Advanced Study, Princeton).
- Sägs ha varit en mycket märklig person, och svår att umgås med. Men bästis med Albert Einstein i Princeton!

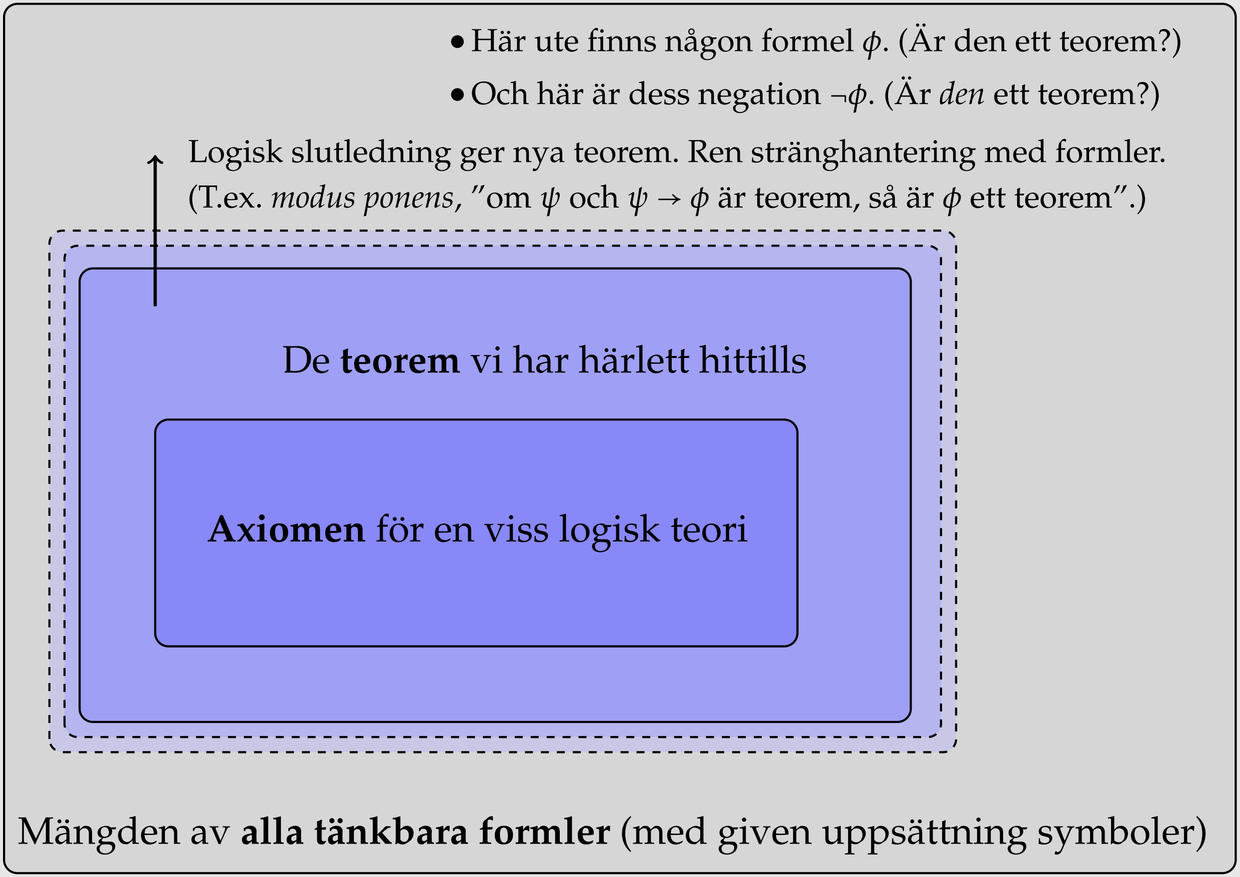
- Led av hypokondri och (med åren tilltagande) paranoia.

  Trodde att någon ville förgifta honom, och litade bara på mat som hustrun lagat eller provsmakat. Vägrade äta när hon hamnade på sjukhus, och dog av undernäring. Vägde vid sin död 30 kg.

- Mest känd för:

  - **Gödels fullständighetssats** (doktorsavhandlingen 1930).
  - **Gödels ofullständighetssats** (1931, ibland uppdelad i ”första” och ”andra” ofullständighetssatsen).

  Mycket förvirrande, eftersom ordet ”fullständighet” här syftar på två helt olika saker!


• Här ute finns någon formel ϕ. (Är den ett teorem?)
• Och här är dess negation $\neg\phi$. (Är *den* ett teorem?)
Logisk slutledning ger nya teorem. Ren stränghantering med formler.
(T.ex. *modus ponens*, "om ψ och $\psi \to \phi$ är teorem, så är ϕ ett teorem".)
De **teorem** vi har härlett hittills
Axiomen för en viss logisk teori
Mängden av **alla tänkbara formler** (med given uppsättning symboler)

Gödels fullständighetssats

Slutledningsreglerna är konstruerade för att vara **logiskt sunda**, dvs. ”bevara sanning”:

> Om man tolkar symbolerna på ett sådant sätt att alla axiomen får sanningsvärdet **sant**, så kommer också alla härledda teorem i teorin att få sanningsvärdet **sant** i denna tolkning.

Fullständighetssatsen säger att den klassiska predikatlogiken även uppfyller omvändningen (**”semantisk fullständighet”**):

> Om en formel är en **semantisk konsekvens** av axiomen, dvs. om den är sann i varje tolkning som gör axiomen sanna, så är den också en **syntaktisk konsekvens** av axiomen, dvs. den är ett teorem som går att härleda från axiomen via ändligt många slutledningssteg.

Gödels ofullständighetssats(er)

Här handlar det istället om **”negationsfullständighet”**.

- En logisk teori kallas **(negations)fullständig** om det för varje formel ϕ går att härleda antingen ϕ eller dess negation $\neg\phi$. (Eller båda!)
- En logisk teori kallas **motsägelsefull** ifall det finns en formel ϕ sådan att både ϕ och dess negation $\neg\phi$ kan härledas.

  Ur motsägelsen $\phi \wedge \neg\phi$ kan man sedan härleda *vad som helst*, dvs. i en motsägelsefull teori blir *alla* formler teorem.

  (*Ex falso quodlibet*, ”från det falska (följer) vad som behagas”.)
- En **motsägelsefri** teori är (såklart) en teori som inte är motsägelsefull.

Kom ihåg Hilberts dröm: en logisk teori för hela matematiken, som kan bevisas vara motsägelsefri och negationsfullständig!

Första ofullständighetssatsen:

> En logisk teori som är ”tillräckligt stark för talteori” kan **inte** vara både motsägelsefri och negationsfullständig samtidigt.

En sådan teori, om den är motsägelsefri, måste alltså ha **oavgörbara** formler, dvs. formler ϕ sådana att **varken** ϕ eller $\neg\phi$ är teorem i denna teori.

(Det finns då någon tolkning sådan att axiomen och ϕ är sanna, och någon annan tolkning sådan att axiomen och $\neg\phi$ är sanna.)

Andra ofullständighetssatsen:

> Sådana teorier kan inte bevisa sin egen motsägelsefrihet.

Gödels ursprungliga bevis, som konstrerar en matematisk version av **lögnarparadoxen ”jag ljuger”**, är inte helt lättgenomträngligt!

Såhär beskrivs det av den svenske logikern **Torkel Franzén** (1950–2006) i boken *Gödel's Theorem. An Incomplete Guide to Its Use and Abuse*:

Gödel established the existence of such fixpoints by translating a statement that "says of itself that it has property *P*" into arithmetic. For this, he used a construction which in ordinary (or not so ordinary) language can be formulated as

> The result of substituting the quotation of "The result of substituting the quotation of *x* for '*x*' in *x* has property *P*." for '*x*' in "The result of substituting the quotation of *x* for '*x*' in *x* has property *P*." has property *P*.

Senare har man hittat enklare argument via teorin för **beräkningsbarhet**.

Gödels arbete om ofullständighet har titeln *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme,* dvs. ”Om formellt oavgörbara satser i Principia Mathematica och besläktade system”.

Principia Mathematica är ett mastodontverk i tre volymer av **Bertrand Russell** (1872–1970) och **Alfred North Whitehead** (1861–1947) med syftet att lägga en axiomatisk grund för hela matematiken.

Ökänt för snårig notation! Efter c:a 360 sidor i volym 1 kommer följande passage:

∗54·43. $\vdash :. \alpha, \beta \in 1 . \supset : \alpha \cap \beta = \Lambda . \equiv . \alpha \cup \beta \in 2$

Dem.

$\vdash . {*}54{\cdot}26 . \supset \vdash :. \alpha = \iota ‘ x . \beta = \iota ‘ y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . x \neq y .$

$[{*}51{\cdot}231] \qquad \equiv . \iota ‘ x \cap \iota ‘ y = \Lambda .$

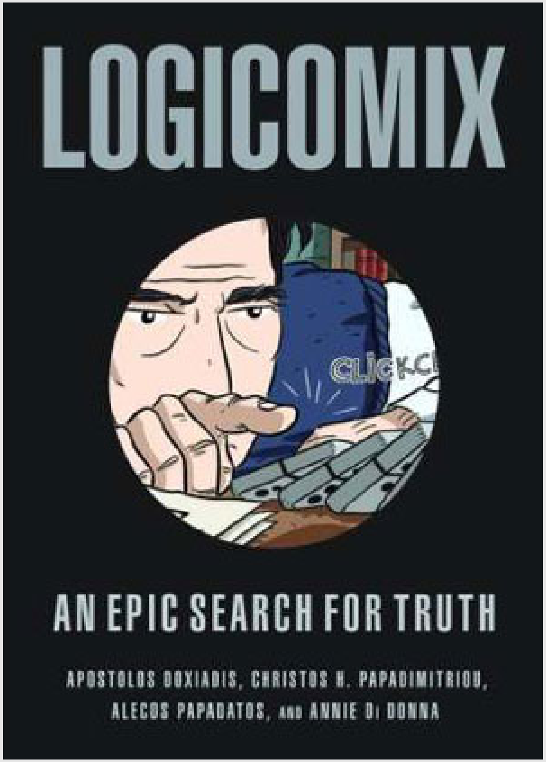
$[{*}13{\cdot}12] \qquad \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \qquad (1)$

$\vdash . (1) . {*}11{\cdot}11{\cdot}35 . \supset$

$\vdash :. (\exists x, y) . \alpha = \iota ‘ x . \beta = \iota ‘ y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \qquad (2)$

$\vdash . (2) . {*}11{\cdot}54 . {*}52{\cdot}1 . \supset \vdash .$ Prop

From this proposition it will follow, when arithmetical addition has been defined, that $1 + 1 = 2$.



I seriealbumet **Logicomix** (2008) kan man läsa mer om detta.

Bertrand Russell är huvudperson. Många andra filosofer och matematiker figurerar också.

(Historien har dock ”förbättrats” lite, t.ex. genom att låta vissa personer träffas i boken fastän de aldrig gjorde det i verkligheten. Och förklaringen av Gödels ofullständighetssats i appendix är helt fel.)

Alan Turing (1912–1954)

- Från London. Pionjär i teoretisk datavetenskap.
- Student och senare *fellow* vid King's College, Cambridge.
- Epokgörande arbete 1936 om Turingmaskiner.

  (”On Computable Numbers, with an Application to the *Entscheidungsproblem*”)
- Jobbade i Bletchley Park under andra världskriget och spelade en viktig roll i knäckandet av tyskarnas *Enigma*-krypto.

  Spelas av Benedict Cumberbatch i filmen *The Imitation Game* (2014).
- Dömdes 1951 till kemisk kastrering för ”gross indecency” (homosexuella relationer).
- Död 1954 i hemmet av cyanidförgiftning. (Självmord?)
- Offentlig ursäkt från brittiska regeringen 2009.

  ”Alan Turing-lagen” från 2017 benådar retroaktivt alla sådana ”brott”.

Beräkningsbarhet

- Vad innebär det att kunna **beräkna** något?
- Vi räknar för hand genom att skriva och radera symboler på ett (rutat) papper. För teoretiska syften antar vi att vi har tillgång till obegränsat mycket papper och blyerts!
- En **Turingmaskin** är en teoretisk idealisering av sådan handräkning.

  En tänkt maskin som har en endimensionell rutad pappersremsa (av obegränsad längd) istället för ett tvådimensionellt pappersark.

  Maskinen kan läsa och skriva symboler på denna remsa, och gör detta enligt en förprogrammerad ändlig lista av instruktioner i stil med

  > ”om symbolen i nuvarande ruta är en trea, byt ut den mot en femma, flytta läshuvudet till nästa ruta till höger, och hoppa till instruktion nummer 15”.

- Det är allmänt accepterat (**Churchs tes**) att de funktioner som kan anses ”möjliga att beräkna” är precis de som man kan programmera en Turingmaskin att räkna ut.

Registermaskinen är en modell som mera liknar en vanlig dator, och som leder till samma klass av beräkningsbara funktioner som Turingmaskinen.

- En registermaskin har ett uppräkneligt antal register (minnesceller) $X_1, X_2, \ldots$ som vart och ett kan lagra ett naturligt tal.

- Ett program består av en ändlig följd av instruktioner av följande fyra typer:

  1. Nollställ X_k.
  2. Öka X_k med 1.
  3. Kopiera X_j till X_k.
  4. Om $X_i = X_j$, hoppa till instruktion nummer k i programmet.
     (Ta $i = j$ för att göra ett ovillkorligt hopp.)

  Förutom vid explicita hopp fortsätter man till nästa instruktion. Programmet stannar om det inte finns någon mer instruktion (eller om man försöker hoppa till en instruktion som inte finns).

- Indata till programmet är det initiala innehållet i registren.

- Utdata är registrerinnehållet när programmet stannar. (*Om* det stannar!)

Givet ett program och ett heltal $n \geq 1$, definieras en funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ på följande sätt:

- För att få reda på vilket utdatavärde $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{N}$ som motsvarar vissa indata $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{N}^n$, sätt registren till $(x_1, \ldots, x_n, 0, 0, 0, \ldots)$ och kör programmet.
- Ifall programmet stannar, tag det tal som då är i register X_1 och låt $f(x_1, \ldots, x_n)$ få detta värde.
- Ifall programmet **inte** stannar, låt $f(x_1, \ldots, x_n)$ vara **odefinierat**.
- Definitionsmängden $D_f \subseteq \mathbf{N}^n$ består alltså av exakt de indata som gör att programmet stannar.

Definition: En funktion

$$f \colon D_f \to \mathbf{N}, \qquad D_f \subseteq \mathbf{N}^n$$

kallas **beräkningsbar** om den ges av något registermaskinprogram på ovanstående sätt.

- Ett givet program definierar en viss funktion av n variabler för varje $n \geq 1$. Men flera olika program kan naturligtvis beräkna samma funktion.

- Hur som helst är antalet program uppräkneligt, och därmed är också antalet beräkningsbara funktioner uppräkneligt.

- Däremot är redan antalet funktioner $f\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ överuppräkneligt, enligt Cantors diagonalargument, så ”de flesta” funktioner är **inte** beräkningsbara.

  (Givet en lista av funktioner $(f_0, f_1, \ldots)$ så kommer $g(k) = f_k(k) + 1$ att definiera en funktion g som inte är med på listan, eftersom den skiljer sig från varje f_k på minst ett ställe.)

- Jaha, det finns alltså massor av funktioner som inte går att beräkna. Kan man hitta något **explicit exempel**?

- Ja, Turing gav ett sådant exempel (se nästa sida), med en intressant teoretisk konsekvens.

  Säg att man sitter och väntar på ett program som man har kört igång. Då kan man (i allmänhet) inte veta ifall det kommer att bli färdigt snart, eller om 10^{100} år, eller aldrig.

  Tänk vad praktiskt om man kunde skriva ett program som kan analysera andra program och *i förväg* avgöra om de kommer att stanna eller gå in i en evig loop.

  Vad Turing visade var att detta är omöjligt!

- Ett **predikat** $P(x_1, \ldots, x_n)$ är en funktion som bara kan anta värdena **falskt** eller **sant** (dvs. talen 0 resp. 1), och som är definierad för alla indata.
- Eftersom antalet program är uppräkneligt kan vi ge varje program ett nummer, och sedan definiera följande predikat:

$$\mathrm{HALT}(x, y) = \text{program nummer } x \text{ stannar när det körs med indata } y.$$

- **Sats (Turing):** Predikatet HALT är **inte** en beräkningsbar funktion.

Bevis: Låt $P(x, y)$ vara ett godtyckligt **beräkningsbart** predikat, och sätt

$$g_P(x) = \begin{cases} 0, & \text{om } P(x,x) \text{ är falskt,} \\ \text{odef. (dvs. evig loop),} & \text{om } P(x,x) \text{ är sant.} \end{cases}$$

Denna funktion är beräkningsbar; vi kan lätt skriva ett program för g_P givet ett program som beräknar P. Säg att detta program för g_P har nummer M_P i vår uppräkning av alla program. Definitionen av $g_P(x)$ med $x = M_P$ insatt säger att om $P(M_P, M_P)$ är falskt så kommer program nummer M_P att stanna när det körs med indata M_P, och om $P(M_P, M_P)$ är sant så kommer det inte att stanna. Med andra ord: $P(M_P, M_P)$ är sant om och endast om $\mathrm{HALT}(M_P, M_P)$ är falskt, så $\mathrm{HALT} \neq P$. Eftersom HALT är skilt från varje beräkningsbart predikat måste det vara oberäkningsbart.

(Cantors diagonalargument igen!)

- Turing var även intresserad av matematisk biologi mot slutet av sitt liv.

- Han upptäckte fenomenet **diffusiv instabilitet** (även kallat **Turing-instabilitet**). Har bl.a. använts för att ge en (spekulativ) förklaring av varför prickiga djur ofta har randiga svansar, men nästan aldrig tvärtom!

Diffusion är en effekt som vanligen **stabiliserar**, dvs. utjämnar koncentrationsskillnader på olika ställen i rummet, men ifall man har två olika substanser som reagerar med varandra, och de har olika diffusionshastighet, så kan närvaron av diffusion (under vissa förutsättningar) faktiskt bidra till att **instabilisera** en situation som vore stabil i frånvaron av diffusion; slumpmässiga störningar av viss våglängd förstärks istället för att släckas ut.

Om det vore så att pälsens pigmentfärg avgörs av koncentrationen hos någon (hypotetisk) kemikalie under fosterstadiet, så skulle diffusiv instabilitet kunna göra att koncentrationen av denna kemikalie inte är jämn, utan ”går i vågor”.

Och på en stor kroppsyta finns det plats för vågor att gå både i x-led och i y-led, vilket ger ett prickigt interferensmönster, men i en smal svans har vågorna bara plats att gå längs med, så då blir det randigt!

Ramanujan (1887–1920)

- Låt oss backa lite i tiden, till den kanske märkligaste matematikern någonsin!
- Uppvuxen i vad som nu är delstaten Tamil Nadu i sydöstra Indien.
- Hans namn är rätt och slätt Ramanujan, ”lillebror till guden Rama”.

  För att skilja från andra med samma namn brukade man ange faderns initial: ”S. Ramanujan” från faderns namn ”Srinivasa”.

  Ibland även med tillägget Iyengar, som är benämningen på den etnisk-religiösa folkgrupp av tamilska brahminer som han tillhörde: ”Srinivasa Ramanujan Iyengar”.

- Huvudsakligen självlärd, från *A Synopsis of Elementary Results in Pure and Applied Mathematics* (1880) av G. S. Carr, en gigantisk formelsamling som han fått tag i på biblioteket.

- Kuggade i allt utom matematik i college, och kom därför inte in på universitetet.
- Försörjde sig med att jobba med bokföring, och arbetade med sin matematik på fritiden.
- Försökte kontakta några engelska matematiker, men fick inget napp förrän han 1913 skrev till **G. H. Hardy** (1877–1947), analytiker och talteoretiker i Cambridge, och bifogade några sidor med smakprov på de resultat han funnit (utan några bevis).
- Hardy beskriver det hela i en minnesartikel publicerad 1937 i *The American Mathematical Monthly*:

  Ramanujan's letters to me, which are reprinted in full in the *Papers*, contain the bare statements of about 120 theorems, mostly formal identities extracted from his note-books. I quote fifteen which are fairly representative. [...]

$$(1)\qquad 1 - \frac{3!}{(1!2!)^3}x^2 + \frac{6!}{(2!4!)^3}x^4 - \cdots$$
$$= \left(1 + \frac{x}{(1!)^3} + \frac{x^2}{(2!)^3} + \cdots\right)\left(1 - \frac{x}{(1!)^3} + \frac{x^2}{(2!)^3} - \cdots\right)$$

(7) If $\alpha\beta = \pi^2$, then

$$\alpha^{-1/4}\left(1 + 4\alpha \int_0^\infty \frac{x\, e^{-\alpha x^2}}{e^{2\pi x} - 1}\, dx\right) = \beta^{-1/4}\left(1 + 4\beta \int_0^\infty \frac{x\, e^{-\beta x^2}}{e^{2\pi x} - 1}\, dx\right)$$

(12)
$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{e^{-2\pi\sqrt{5}}}{1 + \cfrac{e^{-4\pi\sqrt{5}}}{1 + \cdots}}} = \left(\frac{\sqrt{5}}{1 + \sqrt[5]{5^{3/4}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{5/2} - 1}} - \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) e^{2\pi/\sqrt{5}}$$

I should like you to begin by trying to reconstruct the immediate reactions of an ordinary professional mathematician who receives a letter like this from an unknown Hindu clerk.

The first question was whether I could recognize anything. I had proved things rather like (7) myself. [...]

The series formulas (1)–(4) [...] are much harder than they look. [...]

[...] but (10)–(12) defeated me completely; I had never seen anything in the least like them before. A single look at them is enough to show that they could only be written down by a mathematician of the highest class. They must be true because, if they were not true, no one would have had the imagination to invent them.

- Hardy lyckades, med hjälp av sin kollega **E. H. Neville** (1889–1961) som 1914 var i Madras och föreläste, övertala Ramanujan att komma till Cambridge.

  (Att åka utomlands var ”förorenande” och Ramanujan riskerade att bli betraktad som kastlös vid hemkomsten.)

- Ramanujan arbetade där ihop med Hardy och dennes parhäst **John Edensor Littlewood** (1885–1977).

  Det var inte helt enkelt för dem att förstå hur han tänkte… Enligt Ramanujan kom gudinnan Namagiri till honom i drömmen och gav honom formlerna!

  As Littlewood says “the clear-cut idea of what is *meant* by a proof, nowadays so familiar as to be taken for granted, he perhaps did not possess at all; if a significant piece of reasoning occurred somewhere, and the total mixture of evidence and intuition gave him certainty, he looked no further”.

- Notis i Svenska Dagbladet 1 maj 1914:

  Ett matematiskt geni. Vid Cambridges universitet väcker för närvarande en ung hindu Ramanujan stort uppseende, då han utan någon högre utbildning kan lämna prof på djupa insikter i matematiken. Han härstammar från Madras och är 26 år gammal. Den unge mannen har endast fått den i Indien vanliga skolutbildningen och har aldrig studerat vid universitetet i Madras. Ända till för ett par år sedan innehade han en anspråkslös kontorsplats.

  För ett och ett halft år sedan skref Ramanujan till en professor i Cambridge, omtalade sina matematiska studier och sände honom en del lösningar af problem, som särskildt berörde talteorien och de elliptiska funktionerna. Många af lösningarna voro alldeles nya, andra voro redan funna, utan att den unge hinduen kände till det. Han har endast mycket ringa kunskap om den moderna matematiken och om de senaste trettio årens arbeten på detta område, men har på egen hand uppnått resultat, som de stora matematikerna under de senaste århundradena uppnått.

  Nu har Ramanujan kommit till England för att bringa sin genialiska begåfning till full utveckling genom systematiska studier. Medan han redan sysselsatt sig med de högsta problemen och funnit egna lösningar, står han i elementerna tillbaka för de yngsta studenterna. När han afslutat sina studier, tror man sig kunna vänta stora ting af honom.

- Ramanujan hade haft hälsoproblem redan i Indien, och blev sjuk igen 1917. Förvärrat av vitaminbrist, eftersom det var svårt att få tag i bra vegetarisk mat i krigstidens Cambridge.

  He was an orthodox high-caste Hindu, and always adhered (indeed with a severity most unusual in Indian residents in England) to all the observances of his caste. He had promised his parents to do so, and he kept his promises to the letter. He was a vegetarian in the strictest sense – this proved a terrible difficulty later when he fell ill – and all the time he was in Cambridge he cooked all his food himself, and never cooked it without first changing into pyjamas.

- Invaldes 1918 som *fellow* både i Royal Society och Trinity College.

- Tillbringade flera år på olika sjukhem i England. Återvände till Indien i mars 1919, och avled i april 1920.

- Ramanujan publicerade en hel del, men efterlämnade också mycket opublicerat material som senare matematiker har analyserat.

  Ramanujan's Notebooks, 5 volymer (1985–98).

  Ramanujan's Lost Notebook, 4 volymer (2005–13).

  (Redigerade av Bruce C. Berndt, en amerikansk analytisk talteoretiker.)

- En stor del av hans formler är återupptäckter av tidigare resultat (okända för honom p.g.a. bristande utbildning), medan annat är fullständigt originellt och unikt.

  En del är också fel, särskilt inom talteori, där man lätt kan bli lurad av exempel. (Det minsta motexemplet kan vara astronomiskt stort.)

- I filmen *The Man Who Knew Infinity* (2015) spelas Ramanujan av Dev Patel och G. H. Hardy av Jeremy Irons.

Paul Erdős (1913–1996)

Paul Erdős med en tioårig **Terence Tao** (f. 1975) från Australien ("matematikens Mozart", Fieldsmedaljen 2006).

- Mycket produktiv och excentrisk ungersk matematiker.
- Publicerade över 1500 artiklar, med över 500 medförfattare, som sägs ha **Erdőstal 1** (eller ibland $\frac{1}{n}$, om de har n gemensamma artiklar med Erdős); deras medförfattare har sedan **Erdőstal 2**, osv.
- Mest aktiv inom diskret matematik (kombinatorik, grafteori, talteori, diskret sannolikhetslära).

  Älskade att lösa problem och formulera hypoteser. Samt att utlysa penningbelöningar för lösningar!

- Utbildad i Ungern. Postdoc i Cambridge 1934.
- Flydde till USA 1938 (han var av judisk familj).
- Diverse tillfälliga jobb. Nekades återinträde till USA 1954 efter en konferensresa till Europa.
- Inledde då en kringresande livsstil utan fast hem, som fortsatte resten av hans liv.
- Knackade på hos matematiker som han kände, och förkunnade:

  –My brain is open!

  Jobbade med dem så länge de stod ut med att han bodde där, och reste sedan vidare till någon annan.

  –Another roof, another proof!

- Kunde jobba långa perioder i sträck, med hjälp av stora doser starkt kaffe och *Benzedrine* (amfetamin!).
- Följande aforism av kollegan **Alfréd Rényi** (1921–1970) tillskrivs ofta felaktigt Erdős:

> A mathematician is a machine for turning coffee into theorems.

- Erdős själv lär dock ha sagt att det amerikanska blaskiga kaffet bara duger för att bevisa lemman!
- Och här är ett annat berömt skämt, den kategoriteoretiskt duala versionen:

> A comathematician is a machine for turning cotheorems into ffee.

- Erdős var prestigelös för det mesta.

  Dock inblandad in en berömd kontrovers med norrmannen **Atle Selberg** (1917–2007) angående upptäckten 1949 av ett elementärt bevis (dvs. utan komplex analys) av **primtalssatsen**:

  $$\text{Antalet primtal} \leq n \text{ är ungefär } n/\ln n.$$

  (Kvoten mellan de båda storheterna går mot 1 då $n \to \infty$.)

Liten ordlista över ”erdősiska”

epsilon	barn
noise	musik
poison	alkohol
get captured	gifta sig
bosses	hustrur
slaves	makar
trivial beings	icke-matematiker
dead	har slutat med matematik
preach	föreläsa
Sam & Joe	USA (onkel Sam) & Sovjetunionen (Josef Stalin)
on the long wavelength	kommunist (dvs. röd)
study Jordan’s theorem	sitta i fängelse
SF (the Supreme Fascist)	Gud
The Book	Guds bok med de optimala bevisen

(”You don’t have to believe in God, but you should believe in The Book.”)

”Nicolas Bourbaki”

- Pseudonym för en grupp franska matematiker:

  André Weil (1906–1998)
  Jean Dieudonné (1906–1992)
  Henri Cartan (1904–2008)
  m.fl.

- Grundades 1934 i Paris.

- Producerade bokserien *Éléments de mathématique*, med målet att täcka alla huvudområden i modern matematik på ett grundligt, axiomatiskt och abstrakt sätt.

  (Efter ett långt uppehåll återupptogs aktiviteten, och den senast utgivna boken kom 2019.)

- Inflytelserika vad gäller notation och terminologi.

Alexander Grothendieck (1928–2014)

- Legendarisk matematiker i den abstrakta Bourbaki-traditionen, något av en Messias-gestalt i vissa kretsar.
- Född i Berlin. Föräldrarna anarkister som flydde från nazisterna till Paris 1933.
- Lämades hos en bekant i Hamburg, kom till Paris 1938.
- Fadern (jude) utlämnades av Vichy-regimen till tyskarna och dog i Auschwitz. Även Alexander och hans mor satt i diverse fångläger.
- Studier på olika franska universitet efter kriget. En period i USA.
- 1958 jobb på IHÉS (Institut des hautes études scientifiques), ett då nystartat forskningsinstitut i Bures-sur-Yvette strax söder om Paris.

- Intensiv seminarieverksamhet, med många hängivna ”lärjungar”, inom ämnen som algebraisk geometri och talteori. Extremt abstrakt och avancerat, men även extremt vackert och helt revolutionerande, säger de som förstår!
- Politisk aktivist (pacifist).
- Fieldsmedaljen 1966. Accepterade utnämningen, men vägrade åka till matematikerkongressen i Moskva för att ta emot medaljen.
- Föreläste i Hanoi mitt under USA:s bombningar 1967, i protest mot Vietnamkriget.
- Sade upp sig från IHÉS c:a 1970.

  (Protesterade mot finansiering från militären. Kanske utarbetad också?)
- Återvände som professor i Montpellier efter några år, men publicerade inte så mycket konventionell matematik därefter.

  (Självbiografi, programförklaringar, mysticism, . . .)
- Flyttade 1991 till hemlig ort i Pyrenéerna i södra Frankrike, där han bodde till sin död 2014, nästan helt utan kontakt med omvärlden.

John Horton Conway (1937–2020)

- Brittisk matematiker, i Cambridge till 1987, därefter Princeton (USA).
- Ägnade en stor del av sin karriär åt att sitta i allrummet på jobbet och spela spel…

  Med fullständigt häpnadsväckande resultat!

- Biografi *Genius at Play* (2015) av Siobhan Roberts.

  "An unabashed original, John Horton Conway is Archimedes, Mick Jagger, Salvador Dalí, and Richard Feynman all rolled into one – a singular mathematician with a rock star's charisma, a sly sense of humor, a polymath's promiscuous curiosity, and a burning desire to explain everything about the world to everyone in it."

- Avled i april 2020, i det inledande skedet av covid-pandemin.

Några av Conways påhitt

- Det **surrella talsystemet** (via **kombinatorisk spelteori**).
- **Game of Life**, en s.k. *cellulär automat*.

  (Blev en stor fluga tack vare Martin Gardner, *Scientific American*, okt 1970.)

  Äger rum på ett oändligt stort kvadratiskt rutnät, där varje ruta (cell) kan vara antingen ”levande” eller ”död”. Vid varje tidssteg händer följande:

  - Levande cell överlever omm den har exakt 2 eller 3 levande grannar (av 8).
  - Död cell blir levande omm den har exakt 3 levande grannar.

  Ange en startkonfiguration, sätt igång, och se vad som händer! [copy.sh/life]

  (Game of Life är **Turingfullständigt**, dvs. kan beräkna allt som en Turingmaskin kan beräkna!)

- **Conwaygrupperna**, några av de ”sporadiska” exemplen i klassifikationen av **enkla ändliga grupper**.

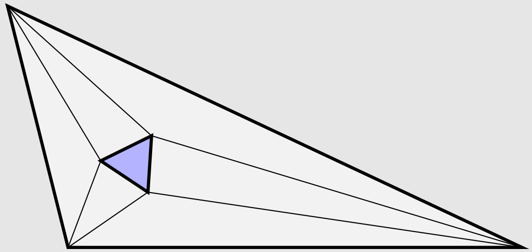
  Namngav även den allra största sporadiska gruppen, **The Monster Group**, med 808 017 424 794 512 875 886 459 904 961 710 757 005 754 368 000 000 000 element.

  (Symmetrigruppen för den 196884-dimensionella Griess-algebran.)

  Upptäckaren Robert Griess hade kallat gruppen för **The Friendly Giant**, men Conways namnförslag hade bättre genomslagskraft!

- **Conways bas 13-funktion**, som är diskontinuerlig överallt, och i varje intervall antar alla reella värden:
  - Givet $x \in \mathbf{R}$, skriv x i basen 13 med symbolerna 0123456789ABC.
  - Byt ut alla A, B och C mot plustecken, minustecken respektive decimalkomma.
  - Låt $f(x) = y$ om den resulterande strängen fr.o.m. någon position bildar ett välformat decimaltal $"y = \pm y_1 \ldots y_n{,}z_1z_2z_3 \ldots"$. Annars låt $f(x) = 0$.
- Enkelt bevis för **"Morleys mirakel"**:

  Där **trisektriserna** i en triangel möts bildas en **liksidig** triangel.



(Satsen upptäckt c:a 1900. Ökänt svårbevisad, tills Conway fann beviset från *The Book* c:a 1985.)

- Smart **notation** för diverse saker:
  - De 17 symmetrigrupperna i planet, som beskriver alla möjliga ”typer av tapetmönster”, samt motsvarande grupper i sfärisk och hyperbolisk geometri.

    (Föreläste om detta vid LiU 1995, sal C1, på föreläsningsturné i KVA:s regi.)
  - Knutar och ”trassel” (*tangles*).
  - Polyedrar.
  - Gigantiska heltal (Conways pilnotation).

- **FRACTRAN**, ännu ett Turingfullständigt programmeringsspråk.

  Conway: ”Man kan lära sig hela dess syntax på 10 sekunder.”

  – Ett FRACTRAN-program består av en ändlig lista av positiva bråk.

  – Indata: ett positivt heltal n.

  – Ett programsteg består i att uppdatera n, genom att ta det första bråket Q i listan för vilket nQ är ett heltal, och byta ut n mot detta heltal.

    (Programmet stannar ifall det inte finns något sådant bråk Q.)

Exempel. Om man kör FRACTRAN-programmet

$$\left(\frac{17}{91}, \frac{78}{85}, \frac{19}{51}, \frac{23}{38}, \frac{29}{33}, \frac{77}{29}, \frac{95}{23}, \frac{77}{19}, \frac{1}{17}, \frac{11}{13}, \frac{13}{11}, \frac{15}{2}, \frac{1}{7}, \frac{55}{1}\right)$$

med startvärdet $n = 2$ så får man successivt

$$n = 15, 825, 725, 1925, 2275, 425, 390, 330, 290, 770, \ldots,$$

och om man sedan sållar bort alla tal som inte är tvåpotenser får man kvar (i tur och ordning) tvåpotenserna

$$2^2, 2^3, 2^5, 2^7, 2^{11}, 2^{13}, 2^{17}, 2^{19}, 2^{23}, \ldots$$

Primtalen!

- **Conways domedagsalgoritm** ger veckodagen för ett givet datum.

  Domedagen för ett givet år är **sista februari**. Följande datum detta år infaller på **samma veckodag som domedagen**:

  $$^{4}/_{4} \quad ^{6}/_{6} \quad ^{8}/_{8} \quad ^{10}/_{10} \quad ^{12}/_{12} \qquad \underbrace{^{9}/_{5} \quad ^{5}/_{9} \qquad ^{7}/_{11} \quad ^{11}/_{7}}_{\text{"Jobba 9 till 5 på 7-Eleven."}}$$

  Sista januari är också samma veckodag, eftersom februari är exakt fyra veckor, utom vid skottår. Och **första mars** är en dag efter.

  Domedagen för år **1900** var en **onsdag** ("we-in-this-day").

  Domedagen för år **2000** var en **tisdag** ("two's-day").

  Vart år avancerar domedagen **ett steg**, plus **ett extra steg** vart fjärde år p.g.a. skottår (förutom att årtal delbara med 100 inte är skottår, förutom att de *är* det ifall de är delbara med 400).

  På fyra år blir det $1+1+1+2 =$ **fem steg framåt** (= **två steg bakåt**).

  Och på tolv år blir det $3 \cdot 5 = 14 + 1$ steg, alltså **ett steg framåt**.

Exempel: Min födelsedag, **15 april 1970**.

- Utgå från år 1900. Vi vet att domedagen det året var en **onsdag**.
- Ta **fem stycken 12-årsskutt** för att komma till 1960.
  Domedagen flyttas **fem steg framåt** (ett steg per skutt).
- Ta **två stycken 4-årsskutt** för att komma till 1968.
  Domedagen flyttas **fyra steg bakåt** (två steg bakåt per skutt).
- Ta **två stycken 1-årsskutt** för att komma till 1970.
  Domedagen flyttas **två steg framåt** (ett steg per skutt).
- Sammanlagt alltså **tre steg framåt** från **onsdag**, så domedagen år 1970 var en **lördag**.
- Därmed var även 4 april 1970 en **lördag**.
- Från 4 till 15 april är det $11 = 7 + 4$ dagar, alltså var 15 april 1970 en **lördag** + 4 = **onsdag**.
- Jag är alltså född på en **onsdag**.

- Hur är denna följd bildad?

$$\begin{array}{c} 1 \\ 11 \\ 21 \\ 1211 \\ 111221 \\ 312211 \\ 13112221 \\ 1113213211 \\ 31131211131221 \\ 13211311123113112211 \\ \vdots \end{array}$$

”The look-and-say sequence”

1	”en etta”
11	”två ettor”
21	”en tvåa & en etta”
1211	”en etta & en tvåa & två ettor”
111221	”tre ettor & två tvåor & en etta”
312211	osv.
13112221	
1113213211	
31131211131221	
13211311123113112211	
⋮	

Analyseras i Conways artikel

The Weird and Wonderful Chemistry of Audioactive Decay

publicerad 1986 i studenttidningen *Eureka* i Cambridge.

1
11
21
1211
111221
312211
13112221

1113**2**	**13211**
31131**2**	11131221
132113111**2**	3113112211
1113122113311**2**	**13211**3212221
311311222123211**2**	111312211312113211
132113213211121312211**2**	311311222113111221131221
⋮	⋮

Strängen S = 1113213211 består av delsträngar L = 11132 och R = 13211 vars ”avkomlingar” ej påverkar varandra i senare steg. Notation:

$$S = L.R = 11132.13211$$

Odelbara strängar kallas för **atomer**, t.ex. L och R från förra sidan:

- Hf = 11132 (hafnium, atomnummer 72).
- Sn = 13211 (tenn, atomnummer 50).

I nästa steg omvandlas dessa atomer via **audioaktivt sönderfall**:

- Hf $\longrightarrow$ Lu = 311312 (lutetium, atomnummer 71).
- Sn $\longrightarrow$ In = 11131221 (indium, atomnummer 49).

Lutetium sönderfaller sedan, i tur och ordning, till

- Yt = 1321131112 (ytterbium, atomnummer 70)
- Tm = 11131221133112 (tulium, atomnummer 69)
- Er.Ca.Co = 311311222.12.32112 som består av atomerna
  - Er = 311311222 (erbium, atomnummer 68)
  - Ca = 12 (kalcium, atomnummer 20)
  - Co = 32112 (kobolt, atomnummer 27)

Och så vidare…

Den kosmologiska satsen:

Om man börjar med vilken sträng som helst som bara innehåller siffrorna 1, 2, 3, så kommer den efter ändligt många steg enbart att innehålla atomer från det ”periodiska systemet”:

The Periodic Table. (Uranium to Silver)

abundance:-	n	E_n	E_n inside the derivate of E_{n+1} :
102.56285249	92	U	3
9883.5986392	91	Pa	13
7581.9047125	90	Th	1113
6926.9352045	89	Ac	3113
5313.7894999	88	Ra	132113
4076.3134078	87	Fr	1113122113
3127.0209328	86	Rn	311311222113
2398.7998311	85	At	Ho.1322113
1840.1669683	84	Po	1113222113
1411.6286100	83	Bi	3113322113
1082.8883285	82	Pb	Pm.123222113
830.70513293	81	Tl	111213322113
637.25039755	80	Hg	31121123222113
488.84742982	79	Au	132112211213322113
375.00456738	78	Pt	111312212221121123222113
287.67344775	77	Ir	3113112211322112211213322113
220.68001229	76	Os	1321132122211322212221121123222113
169.28801808	75	Re	111312211312113221133211322112211213322113
315.56655252	74	W	Ge.Ca.312211322212221121123222113
242.07736666	73	Ta	13112221133211322112211213322113
2669.0970363	72	Hf	11132.Pa.H.Ca.W
2047.5173200	71	Lu	311312
1570.6911808	70	Yb	1321131112
1204.9083841	69	Tm	11131221133112
1098.5955997	68	Er	311311222.Ca.Co
47987.529438	67	Ho	1321132.Pm
36812.186418	66	Dy	111312211312
28239.358949	65	Tb	3113112221131112
21662.972821	64	Gd	Ho.13221133112
20085.668709	63	Eu	1113222.Ca.Co
15408.115182	62	Sm	311332
29820.456167	61	Pm	132.Ca.Zn
22875.863883	60	Nd	111312
17548.529287	59	Pr	31131112
13461.825166	58	Ce	1321133112
10326.833312	57	La	11131.H.Ca.Co
7921.9188284	56	Ba	311311
6077.0611889	55	Cs	13211321
4661.8342720	54	Xe	11131221131211
3576.1856107	53	I	311311222113111221
2743.3629718	52	Te	Ho.1322113312211
2104.4881933	51	Sb	Eu.Ca.3112221
1614.3946687	50	Sn	Pm.13211
1238.4341972	49	In	11131221
950.02745646	48	Cd	3113112211
728.78492056	47	Ag	132113212221

The Periodic Table. (Palladium to Hydrogen)

abundance:-	n	E_n	E_n inside the derivate of E_{n+1} :
559.06537946	46	Pd	111312211312113211
428.87015041	45	Rh	311311222113111221131221
328.99480576	44	Ru	Ho.132211331222113112211
386.07704943	43	Tc	Eu.Ca.311322113212221
296.16736852	42	Mo	13211322211312113211
227.19586752	41	Nb	1113122113322113111221131221
174.28645997	40	Zr	Er.12322211331222113112211
133.69860315	39	Y	1112133.H.Ca.Tc
102.56285249	38	Sr	3112112.U
78.678000089	37	Rb	1321122112
60.355455682	36	Kr	11131221222112
46.299868152	35	Br	3113112211322112
35.517547944	34	Se	13111321222113222112
27.246216076	33	As	11131221131211322113322112
1887.4372276	32	Ge	31131122211311122113222.Na
1447.8905642	31	Ga	Ho.13221133122211331
23571.391336	30	Zn	Eu.Ca.Ac.H.Ca.312
18082.082203	29	Cu	131112
13871.124200	28	Ni	11133112
45645.877256	27	Co	Zn.32112
35015.858546	26	Fe	13122112
26861.360180	25	Mn	111311222112
20605.882611	24	Cr	31132.Si
15807.181592	23	V	13211312
12126.002783	22	Ti	11131221131112
9302.0974443	21	Sc	3113112221133112
56072.543129	20	Ca	Ho.Pa.H.12.Co
43014.360913	19	K	1112
32997.170122	18	Ar	3112
25312.784218	17	Cl	132112
19417.939250	16	S	1113122112
14895.886658	15	P	311311222112
32032.812960	14	Si	Ho.1322112
24573.006696	13	Al	1113222112
18850.441228	12	Mg	3113322112
14481.448773	11	Na	Pm.123222112
11109.006821	10	Ne	111213322112
8521.9396539	9	F	31121123222112
6537.3490750	8	O	132112211213322112
5014.9302464	7	N	111312212221121123222112
3847.0525419	6	C	3113112211322112211213322112
2951.1503716	5	B	1321132122211322212221121123222112
2263.8860325	4	Be	111312211312113221133211322112211213322112
4220.0665982	3	Li	Ge.Ca.312211322212221121123222112
3237.2968588	2	He	13112221133211322112211213322112
91790.383216	1	H	Hf.Pa.22.Ca.Li

Alla **exotiska grundämnen** som inte är med i periodiska systemet, t.ex. de sju första strängarna i standardföljden som börjar med ”1”, försvinner alltså ändligt många steg efter ”Big Bang”!

Man kan spela samma spel med strängar $n_1 n_2 \ldots n_k$ av godtyckliga positiva heltal (inte bara 1, 2, 3).

Ett tal $n \geq 4$ kan dock aldrig uppkomma spontant genom audioaktivt sönderfall, och om ett sådant tal är med i strängen från början kommer man aldrig att bli av med det.

I detta fall finns det också i det periodiska systemet två ”transuraner” som förekommer i olika ”isotoper”, en isotop för varje tal $n \geq 4$:

- ${}^{n}\mathrm{Np} = 1311222113321132211221121332211n$
  (neptunium, atomnummer 93)

- ${}^{n}\mathrm{Pt} = 312211322212221121123222211n$
  (plutonium, atomnummer 94)

Sönderfall:

$${}^{n}\mathrm{Pt} \longrightarrow {}^{n}\mathrm{Np} \longrightarrow 11132.13.22.12.{}^{n}\mathrm{Pt} = \mathrm{Hf.Pa.H.Ca.}{}^{n}\mathrm{Pt}$$

Strängens längd växer exponentiellt (utom om man startar med ”22”).

Mer exakt: om s_n är strängens längd efter n steg, så är

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = \lambda$$

där **Conways konstant**

$$\lambda = 1{,}303577269034296391257099 11\ldots$$

är det enda positiva nollstället till polynomet

$$\begin{aligned} p(x) = x^{71} &- x^{69} - 2x^{68} - x^{67} + 2x^{66} + 2x^{65} + x^{64} - x^{63} - x^{62} - x^{61} - x^{60} - x^{59} + 2x^{58} \\ &+ 5x^{57} + 3x^{56} - 2x^{55} - 10x^{54} - 3x^{53} - 2x^{52} + 6x^{51} + 6x^{50} + x^{49} + 9x^{48} - 3x^{47} \\ &- 7x^{46} - 8x^{45} - 8x^{44} + 10x^{43} + 6x^{42} + 8x^{41} - 5x^{40} - 12x^{39} + 7x^{38} - 7x^{37} + 7x^{36} \\ &+ x^{35} - 3x^{34} + 10x^{33} + x^{32} - 6x^{31} - 2x^{30} - 10x^{29} - 3x^{28} + 2x^{27} + 9x^{26} - 3x^{25} \\ &+ 14x^{24} - 8x^{23} - 7x^{21} + 9x^{20} + 3x^{19} - 4x^{18} - 10x^{17} - 7x^{16} + 12x^{15} + 7x^{14} + 2x^{13} \\ &- 12x^{12} - 4x^{11} - 2x^{10} + 5x^{9} + x^{7} - 7x^{6} + 7x^{5} - 4x^{4} + 12x^{3} - 6x^{2} + 3x - 6. \end{aligned}$$

Förklaring:

- Sönderfallet beskrivs av en ”övergångsmatris” A av storlek 92×92, som har det karaktäristiska polynomet

  $$\det(A - xI) = x^{18}(x+1)(x-1)^2 p(x),$$

  där $p(x)$ är polynomet av grad 71 från förra sidan.

- Upprepat sönderfall beskrivs av potenser A^n, och efter ett tag är det bidraget λ^n från **det största egenvärdet** $\lambda = 1{,}30357726903429639\ldots$ som dominerar.

- Motsvarande **egenvektor** ger proportionerna för hur ofta de olika grundämnena förekommer asymptotiskt då $n \to \infty$.

  (Se kolonnen ”abundance” i det periodiska systemet ovan, där proportionen anges i antal miljondelar.)

So far, I can proudly say that this magnificent theory is essentially all my own work. However, the next theorem, the finest achievement so far in Audioactive Chemistry, is the result of the combined labours of three brilliant investigators.

The Cosmological Theorem.

Any string decays into a compound of common and transuranic elements after a bounded number of derivation steps. As a consequence, every string other than the two boring ones increases at the magic rate λ, and the relative abundances of the atoms in its descendants approach the values we have already described.

Proof of the Cosmological Theorem would fill the rest of ***Eureka!*** Richard Parker and I found a proof over a period of about a month of very intensive work (or, rather, play!). We first produced a very subtle and complicated argument which (almost) reduced the problem to tracking a few hundred cases, and then handled these on dozens of sheets of paper (now lost). Mike Guy found a simpler proof that used tracking and backtracking in roughly equal proportions. Guy's proof still filled lots of pages (almost all lost), but had the advantage that it found the longest-lived of the exotic elements, namely the isotopes of **Methuselum** (22333222lln; see Figure 2). Can you find a proof in only a few pages? Please!

ELECTRONIC RESEARCH ANNOUNCEMENTS
OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 3, Pages 78–82 (August 21, 1997)
S 1079-6762(97)00026-7

PROOF OF CONWAY'S LOST COSMOLOGICAL THEOREM

SHALOSH B. EKHAD AND DORON ZEILBERGER

(Communicated by Ronald Graham)

ABSTRACT. John Horton Conway's Cosmological Theorem about sequences like **1, 11, 21, 1211, 111221, 312211,** ... , for which no extant proof existed, is given a new proof, this time hopefully for good.

Datorassisterat bevis i *Maple*.

"Shalosh B. Ekhad" är ingen person, utan Doron Zeilbergers dator!

(Efter hans första dator, en AT&T 3B1 från mitten av 1980-talet.
Shalosh = 3 och ekhad = 1 på hebreiska.)