

Elliptiska integraler, elliptiska funktioner och elliptiska kurvor

Hans Lundmark, MAI

TATA40 Matematiska utblickar
(maj 2025)

95% of people cannot solve this!

$$\frac{\text{Apple}}{\text{Banana} + \text{Pineapple}} + \frac{\text{Banana}}{\text{Apple} + \text{Pineapple}} + \frac{\text{Pineapple}}{\text{Apple} + \text{Banana}} = 4$$

Can you find positive whole values

for Apple, Banana, and Pineapple?

Bestäm positiva heltal a , b och c sådana att

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} = 4.$$

Bestäm positiva heltal a , b och c sådana att

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} = 4.$$

Den minsta lösningen:

$a =$ 437361267 7928697257 8612526023 7139015281 6537558161 6136186214 3799337842 3467772036
(79 siffor)

$b =$ 3687513179 4129999827 1978115652 2547482549 2979968971 9709962831 3747163722 4634055579
(80 siffor)

$c =$ 1 5447680210 8746166441 9513150199 1983748566 4325669565 4317000266 3489825320 2035277999
(81 siffor)

Bestäm positiva heltal a , b och c sådana att

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} = 4.$$

Den minsta lösningen:

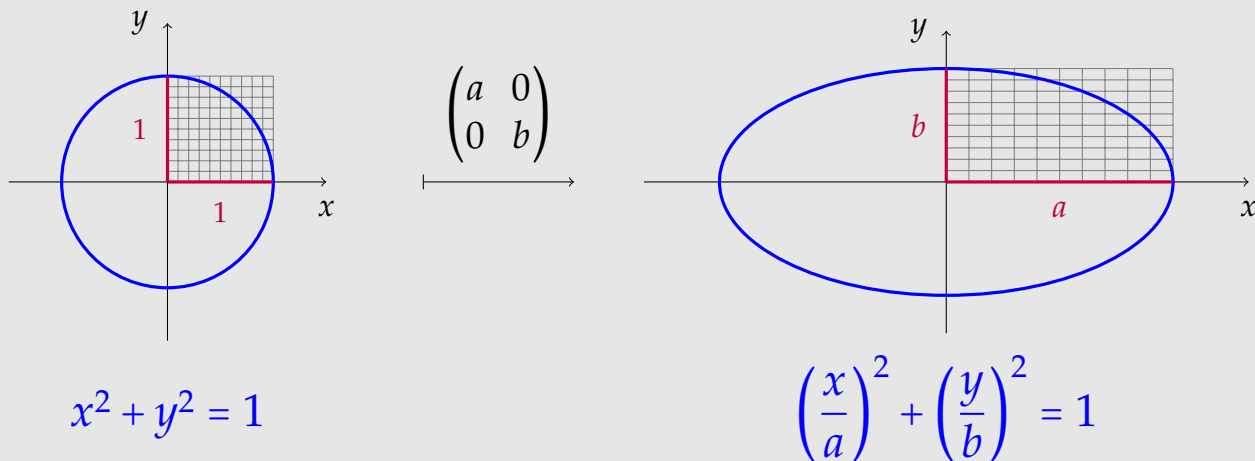
$a =$ 437361267 7928697257 8612526023 7139015281 6537558161 6136186214 3799337842 3467772036
(79 siffor)

$b =$ 3687513179 4129999827 1978115652 2547482549 2979968971 9709962831 3747163722 4634055579
(80 siffor)

$c =$ 1 5447680210 8746166441 9513150199 1983748566 4325669565 4317000266 3489825320 2035277999
(81 siffor)

Fortsättning följer! Men vår berättelse tar sin början i frågan om
ellipsens omkrets...

Ellipsens area – inga problem!



Ellipsen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ fås genom omskalning av enhetscirkeln $x^2 + y^2 = 1$ med en faktor $a > 0$ i x -led och en faktor $b > 0$ i y -led.

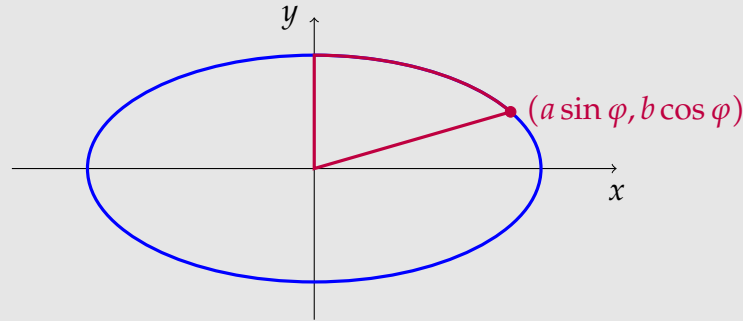
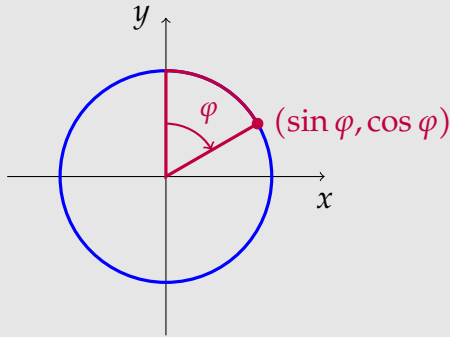
Vid en sådan omskalning multipliceras alla areor med faktorn ab .

Enhetscirkelskivans area är π , så ellipsskivans area blir πab .

Ellipsens omkrets – inte fullt så enkelt!

För att formlerna ska få sitt traditionella utseende parametriserar vi enhetscirkeln på det lite bakvända sättet $(x, y) = (\sin \varphi, \cos \varphi)$.

Ellipsen får då parametriseringen $(x, y) = (a \sin \varphi, b \cos \varphi)$.



Från parametriseringen $(x, y) = (a \sin \varphi, b \cos \varphi)$ beräknas bågelementet:

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2} d\varphi = \sqrt{(a \cos \varphi)^2 + (-b \sin \varphi)^2} d\varphi.$$

Ellipsens omkrets ges alltså av följande integral:

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \end{aligned}$$

Låt oss anta att $a \geq b$. Då kan vi skriva omkretsen såhär:

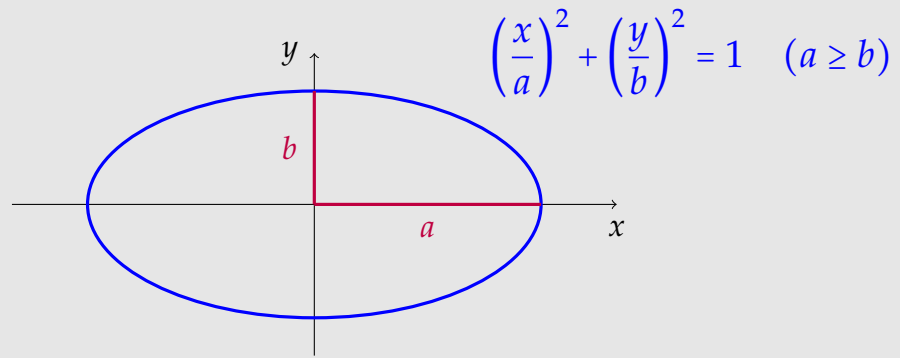
$$\begin{aligned} s &= 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi \\ &= 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 \varphi + \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \varphi} \, d\varphi \\ &= 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 \varphi + \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \varphi} \, d\varphi \\ &= 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \sin^2 \varphi} \, d\varphi, \end{aligned}$$

alltså

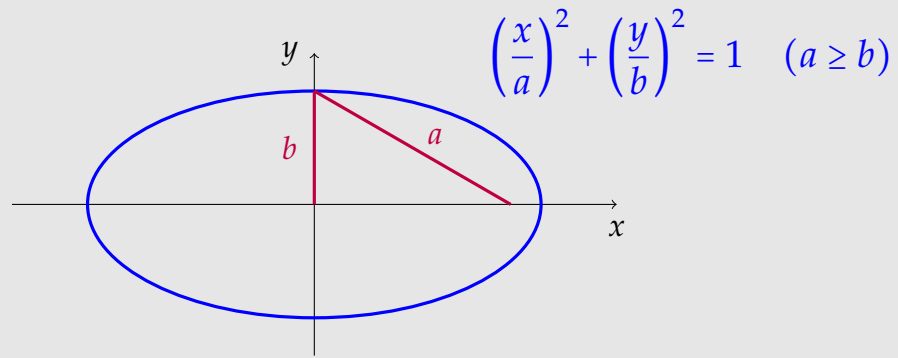
$$s = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi$$

där $\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ är ellipsens **excentricitet** ($0 \leq \varepsilon < 1$).

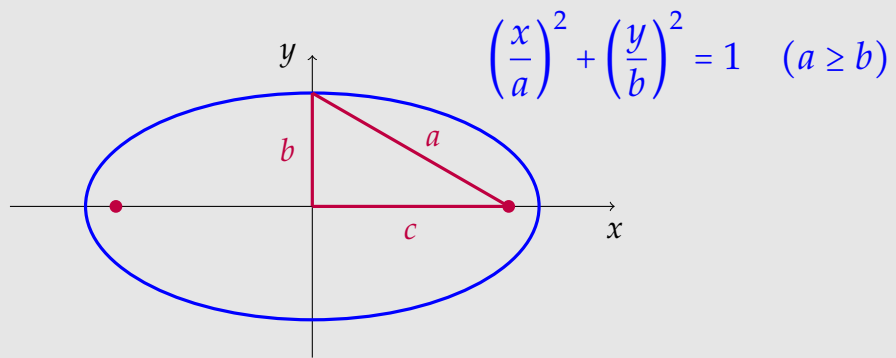
Mellanspel: Några grundläggande ellipsfakta



Mellanspel: Några grundläggande ellipsfakta

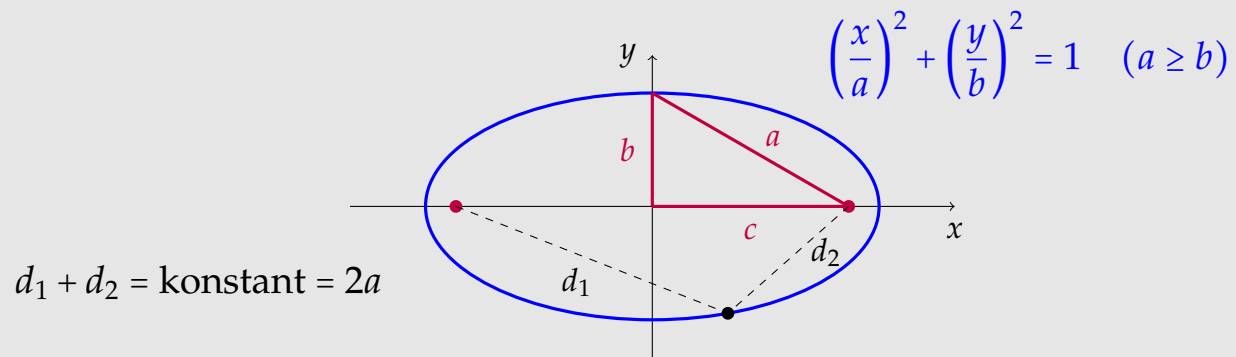


Mellanspel: Några grundläggande ellipsfakta



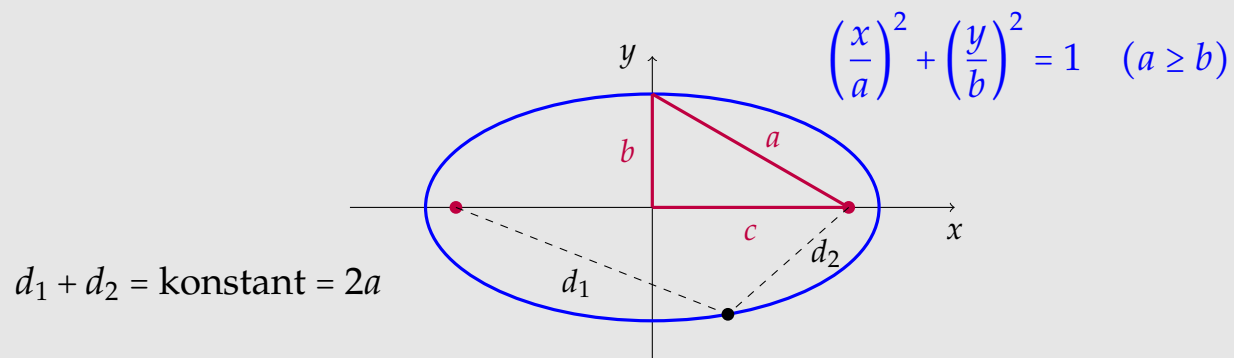
Brännpunkter $(\pm c, 0)$ där $a^2 = b^2 + c^2$.

Mellanspel: Några grundläggande ellipsfakta



Brännpunkter $(\pm c, 0)$ där $a^2 = b^2 + c^2$.

Mellanspel: Några grundläggande ellipsfakta



Brännpunkter $(\pm c, 0)$ där $a^2 = b^2 + c^2$.

$$\text{Excentricitet } \varepsilon := \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}.$$

Här är ett försök att beräkna den integral som ger omkretsen:

$$\begin{aligned} s &= 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi = \left[\begin{array}{l} s = \sin \varphi \\ \varphi = \arcsin s \\ d\varphi = \frac{ds}{\sqrt{1 - s^2}} \end{array} \right] \\ &= 4a \int_0^1 \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2 s^2}}{\sqrt{1 - s^2}} \, ds \\ &= 4a \int_0^1 \frac{1 - \varepsilon^2 s^2}{\sqrt{(1 - s^2)(1 - \varepsilon^2 s^2)}} \, ds \end{aligned}$$

Här är ett försök att beräkna den integral som ger omkretsen:

$$\begin{aligned} s &= 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi = \left[\begin{array}{l} s = \sin \varphi \\ \varphi = \arcsin s \\ d\varphi = \frac{ds}{\sqrt{1 - s^2}} \end{array} \right] \\ &= 4a \int_0^1 \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2 s^2}}{\sqrt{1 - s^2}} \, ds \\ &= 4a \int_0^1 \frac{1 - \varepsilon^2 s^2}{\sqrt{(1 - s^2)(1 - \varepsilon^2 s^2)}} \, ds \end{aligned}$$

Leder till **fjärdegradspolynom** under rottecknet.

Analyskursen tar bara upp roten ur första-/andragradspolynom...

Vad göra?

En **elliptisk integral** är en integral av formen

$$\int R(x, \sqrt{p(x)}) dx$$

där $R(x, y)$ är en rationell funktion och $p(x)$ är ett polynom av grad 3 eller 4 med enkelrötter enbart.

En **elliptisk integral** är en integral av formen

$$\int R(x, \sqrt{p(x)}) dx$$

där $R(x, y)$ är en rationell funktion och $p(x)$ är ett polynom av grad 3 eller 4 med enkelrötter enbart.

I gynnsamma fall kan vi beräkna sådana, t.ex.

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^4 + 1}} dx = \frac{1}{2} \sqrt{x^4 + 1} + C.$$

En **elliptisk integral** är en integral av formen

$$\int R(x, \sqrt{p(x)}) dx$$

där $R(x, y)$ är en rationell funktion och $p(x)$ är ett polynom av grad 3 eller 4 med enkelrötter enbart.

I gynnsamma fall kan vi beräkna sådana, t.ex.

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^4 + 1}} dx = \frac{1}{2} \sqrt{x^4 + 1} + C.$$

Men tyvärr kan elliptiska integraler i allmänhet **inte** uttryckas i de elementära funktionerna. Speciellt gäller detta för integralen på förra sidan (den som ger ellipsens omkrets)!

Vissa elliptiska integraler studerades av bl.a. Euler, Lagrange och Gauss, men **Adrien-Marie Legendre** (1752–1833) var den förste som sammanställde en systematisk teori för dem.



(Bild: Wikimedia Commons.)

Legendre visade att alla elliptiska integraler kan reduceras (via variabelbyten etc.) till följande tre typer (där $s = \sin \varphi$, som ovan):

- Första slaget:

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad \left(= \int \frac{ds}{\sqrt{(1 - s^2)(1 - k^2 s^2)}} \right)$$

- Andra slaget:

$$\int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi \quad \left(= \int \frac{\sqrt{1 - k^2 s^2}}{\sqrt{1 - s^2}} ds \right)$$

- Tredje slaget:

$$\int \frac{d\varphi}{(1 - n \sin^2 \varphi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

Vid integration över intervallet $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ (resp. $0 \leq s < 1$) säger man att den elliptiska integralen är **fullständig**.

Vid integration över intervallet $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ (resp. $0 \leq s < 1$) säger man att den elliptiska integralen är **fullständig**.

Den **fullständiga elliptiska integralen av andra slaget** är alltså

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi = \int_0^1 \frac{\sqrt{1 - k^2 s^2}}{\sqrt{1 - s^2}} \, ds$$

där parametern k traditionellt kallas för integralens **modul**.

Vid integration över intervallet $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ (resp. $0 \leq s < 1$) säger man att den elliptiska integralen är **fullständig**.

Den **fullständiga elliptiska integralen av andra slaget** är alltså

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi = \int_0^1 \frac{\sqrt{1 - k^2 s^2}}{\sqrt{1 - s^2}} \, ds$$

där parametern k traditionellt kallas för integralens **modul**.

Vi såg ovan att det är just denna integral som ger omkretsen av ellipsen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, ifall vi låter $k = \varepsilon$ (ellipsens excentricitet):

$$s = 4a E(\varepsilon) \quad \text{där } \varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \quad (\text{om } a \geq b).$$

Legendre beskrev många andra problem i mekanik och matematik där elliptiska integraler också dyker upp:

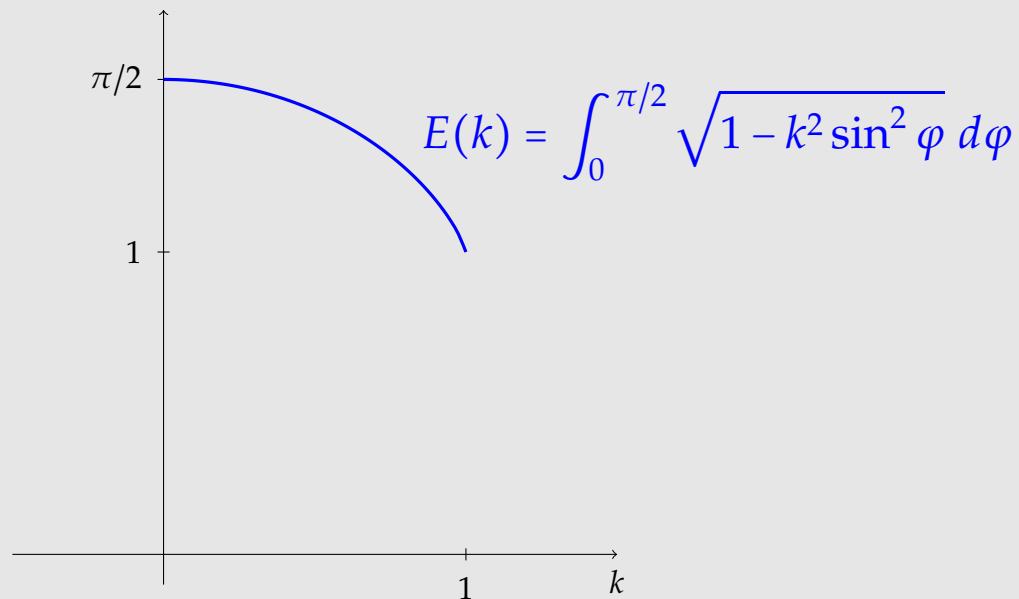
- Båglängd för hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, lemniskata $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$.
- Ytarea för ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.
- Ytarea för sned cirkulär kon.
- Tyngdkraftsfält alstrat av en ellipsoid.
- Geodetiska kurvor på en rotationsellipsoid.
- Svängningstid för pendel.
- Rotation hos stel kropp kring en fix punkt.
- Rörelse i tyngdkraftfältet från två fixa punktmassor.
- Rörelse i vissa centralkraftfält.

Och han ägnade årtal åt att (för hand, såklart) beräkna tabeller med noggranna numeriska värden.

Angle du module.	Log. F'	Log. E'	Angle du module.	Log. F'	Log. E'
0 ^a	0.1961199	0.1961199	90 ^a	Infini.	0.0000000
1	0.1961336	0.1961068	89	0.2319923	0.0002966
2	0.1961572	0.1959899	88	0.6769272	0.0012533
3	0.1961795	0.1958722	87	0.6535566	0.0027777
4	0.1961993	0.1957598	86	0.6075597	0.0037596
5	0.1962171	0.1956939	85	0.5634641	0.0054553
6	0.1972119	0.1956993	84	0.5951379	0.0071221
7	0.1977136	0.1956998	83	0.5441906	0.0092683
8	0.1982149	0.1956994	82	0.5255199	0.0119271
9	0.1987159	0.1956994	81	0.4989994	0.0144211
10	0.1992158	0.1956994	80	0.4687779	0.0172781
11	0.2001373	0.1956994	79	0.4856609	0.0196581
12	0.2009944	0.1956994	78	0.4769776	0.0222787
13	0.2017936	0.1956994	77	0.4697966	0.0251577
14	0.2025431	0.1956994	76	0.4641994	0.0282891
15	0.2032452	0.1956994	75	0.4591766	0.0317277
16	0.2039030	0.1956994	74	0.4547995	0.0355095
17	0.2045175	0.1956994	73	0.4509991	0.0396811
18	0.2050904	0.1956994	72	0.4476994	0.0441819
19	0.2056227	0.1956994	71	0.4447998	0.0490533
20	0.2061220	0.1956994	70	0.4422996	0.0542886
21	0.2065928	0.1956994	69	0.4401996	0.0598997
22	0.2070308	0.1956994	68	0.4383994	0.0658997
23	0.2074396	0.1956994	67	0.4367996	0.0722997
24	0.2078231	0.1956994	66	0.4353996	0.0790997
25	0.2081861	0.1956994	65	0.4341996	0.0862997
26	0.2085236	0.1956994	64	0.4331996	0.0938997
27	0.2088396	0.1956994	63	0.4322996	0.1018997
28	0.2091281	0.1956994	62	0.4314996	0.1102997
29	0.2093931	0.1956994	61	0.4307996	0.1190997
30	0.2096281	0.1956994	60	0.4302996	0.1282997
31	0.2098361	0.1956994	59	0.4298996	0.1378997
32	0.2100196	0.1956994	58	0.4295996	0.1478997
33	0.2101736	0.1956994	57	0.4293996	0.1582997
34	0.2103016	0.1956994	56	0.4292996	0.1690997
35	0.2104086	0.1956994	55	0.4292996	0.1802997
36	0.2104986	0.1956994	54	0.4293996	0.1918997
37	0.2105656	0.1956994	53	0.4294996	0.2038997
38	0.2106136	0.1956994	52	0.4295996	0.2162997
39	0.2106456	0.1956994	51	0.4296996	0.2290997
40	0.2106656	0.1956994	50	0.4297996	0.2422997
41	0.2106756	0.1956994	49	0.4298996	0.2558997
42	0.2106756	0.1956994	48	0.4299996	0.2700997
43	0.2106656	0.1956994	47	0.4300996	0.2848997
44	0.2106456	0.1956994	46	0.4301996	0.2999997
45	0.2106136	0.1956994	45	0.4302996	0.3154997

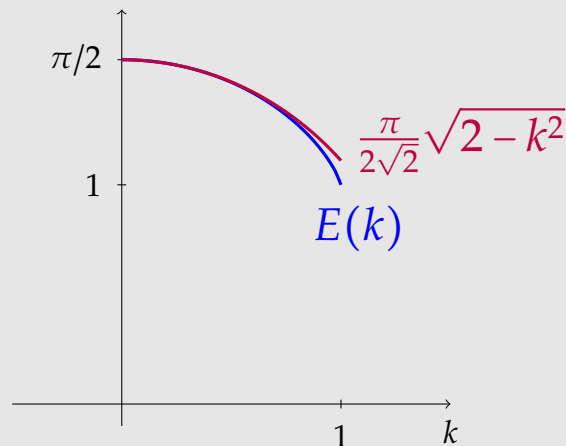
Numera är det enkelt att med dator beräkna elliptiska integraler med hög precision.

(Med allmänna numeriska metoder för bestämda integraler, eller med effektivare algoritmer specialgjorda för elliptiska integraler.)



Det finns också en uppsjö av approximativa analytiska uttryck för ellipsens omkrets, t.ex. det här, som är enkelt men inte så precist:

$$s \approx 2\pi\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \quad \left(= 4a \cdot \underbrace{\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\sqrt{2 - \varepsilon^2}}_{\text{approx. till } E(\varepsilon)} \right)$$



Låt oss se hur man effektivt kan beräkna den **fullständiga elliptiska integralen av första slaget** (som är lite enklare än andra slaget):

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{(1 - s^2)(1 - k^2 s^2)}}$$

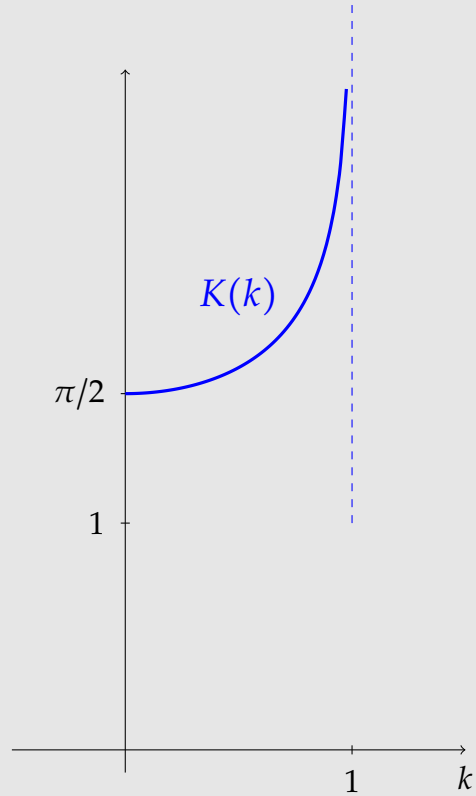
Låt oss se hur man effektivt kan beräkna den **fullständiga elliptiska integralen av första slaget** (som är lite enklare än andra slaget):

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{(1 - s^2)(1 - k^2 s^2)}}$$

Denna elliptiska integral ger perioden T för en matematisk pendel med längd L och maximal utslagsvinkel α :

$$T = \frac{4K(\sin \frac{\alpha}{2})}{\omega} \quad \text{där } \omega = \sqrt{g/L}.$$

(Här är g tyngdaccelerationen, såklart.)



$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

Istället för att direkt studera

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

betraktar vi integralen

$$I(a, b) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}$$

där a och b är positiva tal.

Därför kan vi få $K(k)$ genom att låta $a = 1$ och $b = \sqrt{1 - k^2}$.

För $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$ kan rotuttrycket i integralen $I(a, b)$ skrivas som

$$\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} = \sqrt{\cos^2 \varphi \left(a^2 + b^2 \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} \right)} = \cos \varphi \sqrt{a^2 + (b \tan \varphi)^2},$$

så låt oss prova variabelbytet $t = b \tan \varphi$ (vilket leder till det nya integrationsintervallet $0 \leq t < \infty$).

För $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$ kan rotuttrycket i integralen $I(a, b)$ skrivas som

$$\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} = \sqrt{\cos^2 \varphi \left(a^2 + b^2 \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} \right)} = \cos \varphi \sqrt{a^2 + (b \tan \varphi)^2},$$

så låt oss prova variabelbytet $t = b \tan \varphi$ (vilket leder till det nya integrationsintervallet $0 \leq t < \infty$).

$$\varphi = \arctan(t/b) \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1/b}{1 + (t/b)^2} = \frac{b}{b^2 + t^2}$$

För $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$ kan rotuttrycket i integralen $I(a, b)$ skrivas som

$$\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} = \sqrt{\cos^2 \varphi \left(a^2 + b^2 \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} \right)} = \cos \varphi \sqrt{a^2 + (b \tan \varphi)^2},$$

så låt oss prova variabelbytet $t = b \tan \varphi$ (vilket leder till det nya integrationsintervallet $0 \leq t < \infty$).

$$\varphi = \arctan(t/b) \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1/b}{1 + (t/b)^2} = \frac{b}{b^2 + t^2}$$

$$\frac{1}{\cos^2 \varphi} = 1 + \tan^2 \varphi = 1 + \left(\frac{t}{b} \right)^2 = \frac{b^2 + t^2}{b^2} \quad \Longrightarrow \quad \cos \varphi = \frac{b}{\sqrt{b^2 + t^2}}$$

Sammantaget ger bytet $t = b \tan \varphi$ alltså

$$\begin{aligned} I(a, b) &= \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\cos \varphi \sqrt{a^2 + (b \tan \varphi)^2}} \\ &= \int_0^\infty \frac{\frac{b}{b^2 + t^2} dt}{\frac{b}{\sqrt{b^2 + t^2}} \cdot \sqrt{a^2 + t^2}} \\ &= \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{(a^2 + t^2)(b^2 + t^2)}}. \end{aligned}$$

(Notera att $I(a, b) = I(b, a)$.)

Eftersom uttrycket $(a^2 + t^2)(b^2 + t^2)$ är symmetriskt i a och b kan det uttryckas i de **elementära symmetriska polynomen** $a + b$ och ab .

Såhär:

$$\begin{aligned}(a^2 + t^2)(b^2 + t^2) &= a^2b^2 + (a^2 + b^2)t^2 + t^4 \\ &= (ab - t^2)^2 + 2abt^2 + (a^2 + b^2)t^2 \\ &= (ab - t^2)^2 + (a + b)^2t^2.\end{aligned}$$

Om vi här bryter ut $(2t)^2$ får vi

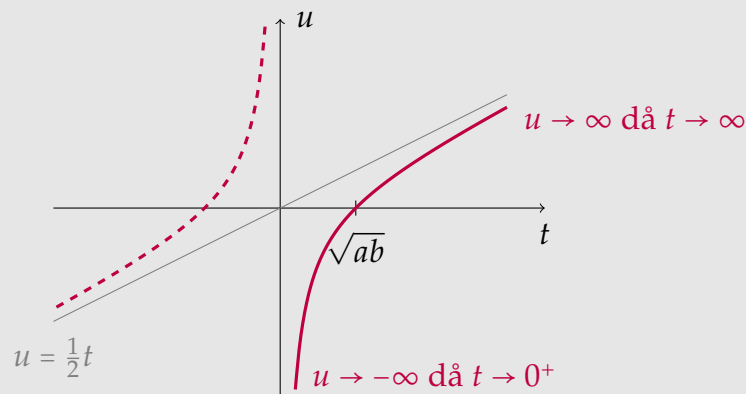
$$(a^2 + t^2)(b^2 + t^2) = (2t)^2 \left(\left(\frac{t^2 - ab}{2t} \right)^2 + \left(\frac{a + b}{2} \right)^2 \right),$$

och nu gör vi ännu ett variabelbyte i integralen, nämligen $u = \frac{t^2 - ab}{2t}$.

Den nya variabeln

$$u = \frac{t^2 - ab}{2t} = \frac{1}{2} \left(t + \frac{-ab}{t} \right)$$

är en strängt växande funktion av t i intervallet $t > 0$, eftersom båda termerna t och $\frac{-ab}{t}$ är strängt växande där. Värdeområdet är hela $\mathbf{R}$.



Inversen till variabelbytet $u = \frac{t^2 - ab}{2t}$ (där $t > 0$) fås genom att skriva om sambandet som $t^2 - 2ut - ab = 0$, lösa denna andragradsekvation, och bara behålla den positiva roten:

$$t = u + \sqrt{u^2 + ab}.$$

Derivering ger

$$\frac{dt}{du} = 1 + \frac{u}{\sqrt{u^2 + ab}} = \frac{\sqrt{u^2 + ab} + u}{\sqrt{u^2 + ab}} = \frac{t}{\sqrt{u^2 + ab}}$$

så att

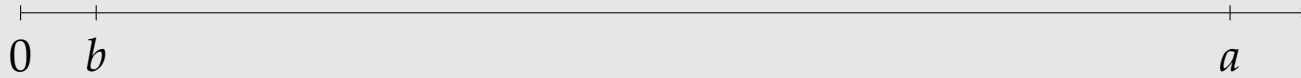
$$\frac{dt}{t} = \frac{du}{\sqrt{u^2 + ab}}.$$

Nu har vi allt som behövs för att utföra variabelbytet i integralen.

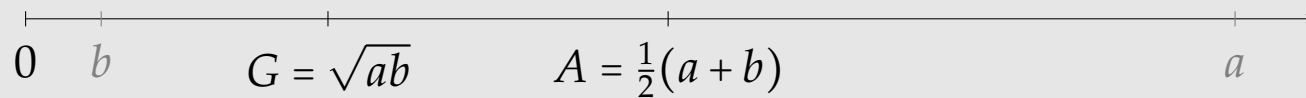
$$\begin{aligned}
I(a,b) &= \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}} = \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{(2t)^2 \left(\left(\frac{t^2-ab}{2t} \right)^2 + \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 \right)}} \\
&= \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dt/t}{\sqrt{\left(\frac{t^2-ab}{2t} \right)^2 + \left(\frac{a+b}{2} \right)^2}} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{du/\sqrt{u^2+ab}}{\sqrt{u^2 + \left(\frac{a+b}{2} \right)^2}} \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{du}{\sqrt{\left(u^2 + \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 \right) (u^2 + ab)}} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{du}{\sqrt{(u^2 + A^2)(u^2 + G^2)}} \\
&= [\text{jämn funktion}] = \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{(u^2 + A^2)(u^2 + G^2)}} = I(A,G) \quad (!!!)
\end{aligned}$$

där $A = \frac{1}{2}(a+b)$ och $G = \sqrt{ab}$ är **aritmetiska** resp. **geometrisk**
medelvärde av talen a och b .

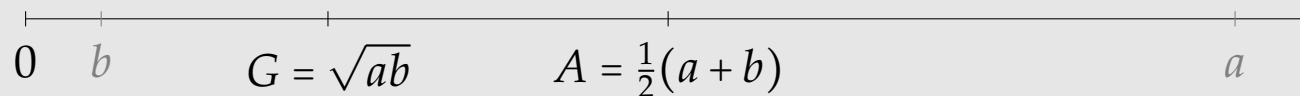
Aritmetiskt resp. geometriskt medelvärde



Aritmetiskt resp. geometriskt medelvärde



Aritmetiskt resp. geometriskt medelvärde



$$0 \leq (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a + b - 2\sqrt{ab}$$

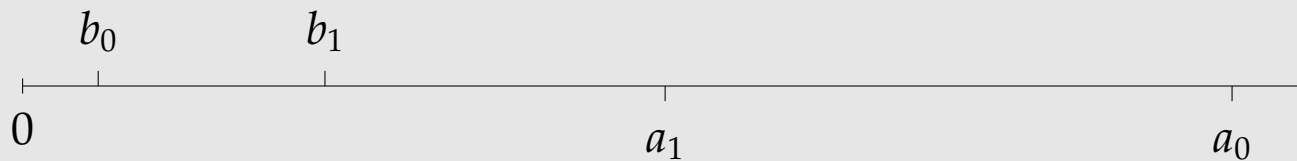
$$\implies \boxed{\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a+b)} \quad (\text{dvs. } G \leq A)$$

Aritmetiskt-geometriskt medelvärde (agm)



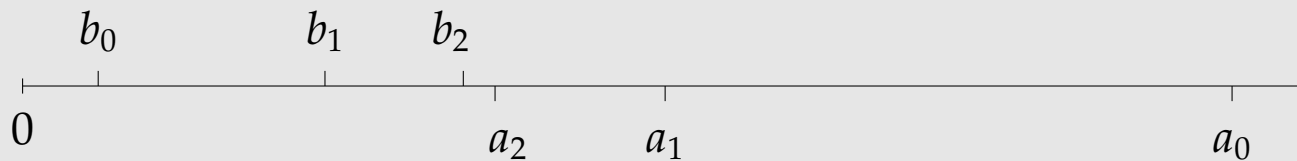
T.ex. $b_0 = 1$ $a_0 = 16$

Aritmetiskt-geometriskt medelvärde (agm)



$$\begin{aligned} \text{T.ex. } b_0 &= 1 & a_0 &= 16 \\ b_1 &= \sqrt{a_0 b_0} = 4 & a_1 &= \frac{1}{2}(a_0 + b_0) = 8.5 \end{aligned}$$

Aritmetiskt-geometriskt medelvärde (agm)

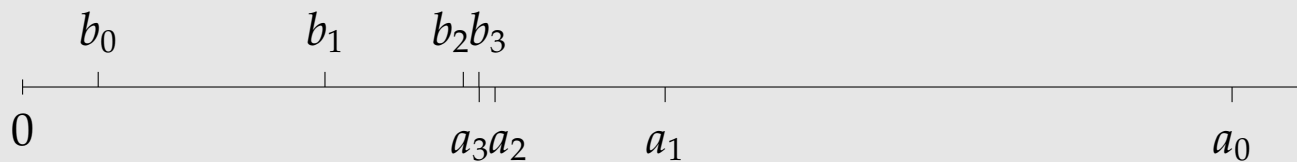


$$\text{T.ex. } b_0 = 1 \quad a_0 = 16$$

$$b_1 = \sqrt{a_0 b_0} = 4 \quad a_1 = \frac{1}{2}(a_0 + b_0) = 8.5$$

$$b_2 = \sqrt{a_1 b_1} \approx 5.83 \quad a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1) = 6.25$$

Aritmetiskt-geometriskt medelvärde (agm)



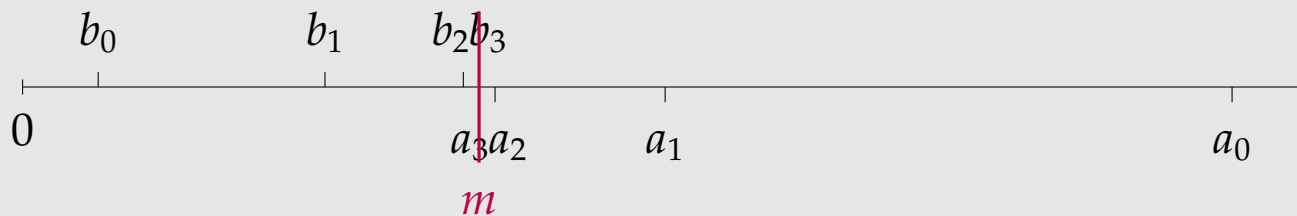
T.ex. $b_0 = 1$ $a_0 = 16$

$$b_1 = \sqrt{a_0 b_0} = 4 \quad a_1 = \frac{1}{2}(a_0 + b_0) = 8.5$$

$$b_2 = \sqrt{a_1 b_1} \approx 5.83 \quad a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1) = 6.25$$

$$b_3 = \sqrt{a_2 b_2} \approx 6.0368 \quad a_3 = \frac{1}{2}(a_2 + b_2) \approx 6.0405$$

Aritmetiskt-geometriskt medelvärde (agm)



T.ex. $b_0 = 1$ $a_0 = 16$

$$b_1 = \sqrt{a_0 b_0} = 4 \quad a_1 = \frac{1}{2}(a_0 + b_0) = 8.5$$

$$b_2 = \sqrt{a_1 b_1} \approx 5.83 \quad a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1) = 6.25$$

$$b_3 = \sqrt{a_2 b_2} \approx 6.0368 \quad a_3 = \frac{1}{2}(a_2 + b_2) \approx 6.0405$$

$\vdots$

$\vdots$

$$m = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \text{agm}(a_0, b_0) \approx 6.0386583404171936515$$

$$I(a, b) = I(A, G)$$

$\implies$

$$I(a_0, b_0) = I(a_1, b_1) = I(a_2, b_2) = I(a_3, b_3) = \dots$$

$$= I(m, m) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{m^2 \cos^2 \varphi + m^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{m} d\varphi$$

$$= \frac{1}{m} \cdot \frac{\pi}{2} \quad \text{där } m = \operatorname{agm}(a_0, b_0)$$

Vi kan alltså enkelt och effektivt beräkna

$$I(a, b) = \frac{\pi/2}{\operatorname{agm}(a, b)}$$

och därmed även

$$K(k) = I(1, k') = \frac{\pi/2}{\operatorname{agm}(1, k')}$$

där $k' = \sqrt{1 - k^2}$ kallas den **komplementära modulen** till k .

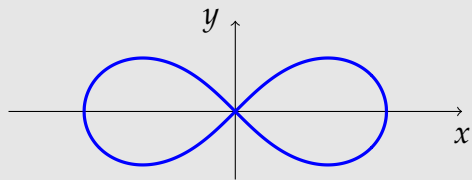
Den lemniskatiska integralen

Historiskt sett var

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

den första elliptiska integralen att undersökas på allvar.

Jakob Bernoulli (1655–1705) stötte på denna integral i sina studier av hur en elastisk stav deformeras under belastning (1694). Han visade att den även ger längden av en **lemniskata**:



$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$$

$$\iff r^2 = \cos 2\varphi$$

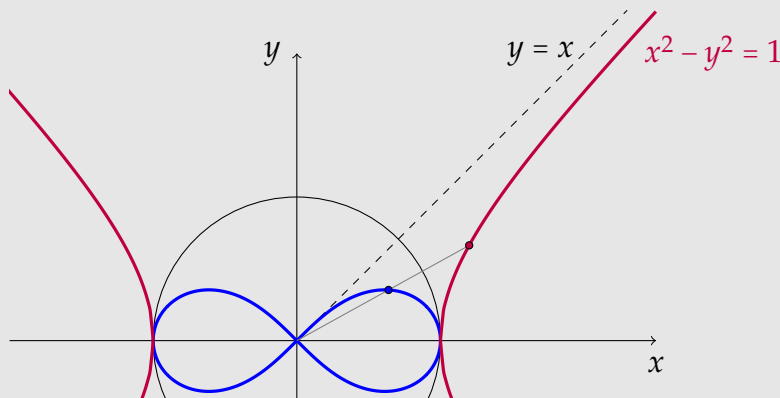
Lemniskatan

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2 \quad \Longleftrightarrow \quad r^2 = \cos 2\varphi$$

och hyperbeln

$$x^2 - y^2 = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad r^2 \cos 2\varphi = 1$$

är relaterade via **spegling i enhetscirkeln**, den operation som består i att byta r mot $\frac{1}{r}$, eller ekvivalent att byta (x, y) mot $\frac{1}{x^2+y^2}(x, y)$.



Den del av lemniskatan $r^2 = \cos 2\varphi$ som ligger i första kvadranten ges av

$$r = \sqrt{\cos 2\varphi}, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}.$$

Formeln för bågelementet i polära koordinater ger

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} d\varphi = \sqrt{\left(\sqrt{\cos 2\varphi}\right)^2 + \left(\frac{-2 \sin 2\varphi}{2\sqrt{\cos 2\varphi}}\right)^2} d\varphi \\ &= \sqrt{\cos 2\varphi + \frac{\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi}} d\varphi = \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} \end{aligned}$$

och alltså totala kurvlängden

$$s = 4 \int_0^{\pi/4} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}.$$

Variabelbytet $r = \sqrt{\cos 2\varphi}$ med

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{-2 \sin 2\varphi}{2\sqrt{\cos 2\varphi}} = \frac{-\sqrt{1 - \cos^2 2\varphi}}{\sqrt{\cos 2\varphi}} = \frac{-\sqrt{1 - r^4}}{r}$$

leder nu till den lemniskatiska integralen:

$$s = 4 \int_0^{\pi/4} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} = 4 \int_0^1 \frac{dr}{\sqrt{1 - r^4}}$$

Med ett ytterligare variabelbyte kan den lemniskatiska integralen transformeras till en fullständig elliptisk integral av första slaget:

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} &= \left[x = \frac{s}{\sqrt{2-s^2}}, \quad \frac{dx}{ds} = \frac{2}{(2-s^2)^{3/2}} \right] \\
 &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{s^4}{(2-s^2)^2}}} \cdot \frac{2}{(2-s^2)^{3/2}} ds \\
 &= \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(2-s^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-\frac{1}{2}s^2)}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi/2}{\operatorname{agm}(1, \frac{1}{\sqrt{2}})} = \frac{\pi/2}{\operatorname{agm}(\sqrt{2}, 1)}
 \end{aligned}$$

Lemniskatan är alltså lite kortare än enhetscirkeln; deras längder skiljer sig åt med faktorn

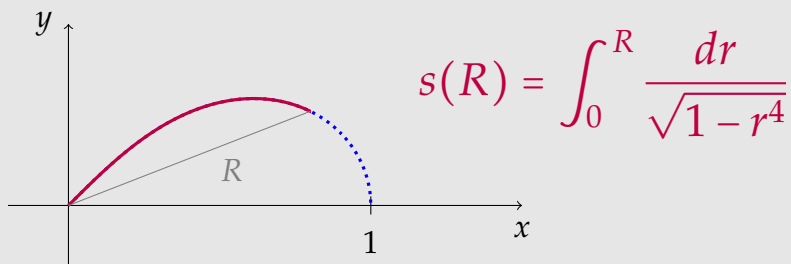
$$\operatorname{agm}(\sqrt{2}, 1) \approx 1.1981402347355922074$$

(Gauss' dagbok, 30 maj 1799. Men resultatet fanns redan "mellan raderna" i en artikel publicerad av Lagrange 1785.)

Vad vi alltså egentligen har gjort är att parametrisera lemniskatan i första kvadranten med vinkeln φ som funktion av radien r :

$$\varphi = \frac{1}{2} \arccos(r^2) \quad (0 \leq r \leq 1).$$

Båglängden från origo ut till den punkt på kurvan där $r = R$ ges av en ofullständig lemniskatisk integral:



Giulio Fagnano (1682–1766) fann 1718 en formel för **fördubbling av lemniskatans båglängd** (som Euler senare byggde vidare på, när han 1751 blev bekant med Fagnanos arbeten):

$$2 \int_0^R \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}} = \int_0^{2R\sqrt{1-R^4}/(1+R^4)} \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} \quad \left(0 \leq R \leq \sqrt{\sqrt{2}-1}\right)$$

Giulio Fagnano (1682–1766) fann 1718 en formel för **fördubbling av lemniskatans båglängd** (som Euler senare byggde vidare på, när han 1751 blev bekant med Fagnanos arbeten):

$$2 \int_0^R \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}} = \int_0^{2R\sqrt{1-R^4}/(1+R^4)} \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} \quad \left(0 \leq R \leq \sqrt{\sqrt{2}-1}\right)$$

Bevis. Variabelbytet $t = 2r\sqrt{1-r^4}/(1+r^4)$ har derivatan

$$\frac{dt}{dr} = \frac{2}{\sqrt{1-r^4}} \cdot \frac{1-6r^4+r^8}{(1+r^4)^2}$$

som är positiv för $0 < r < \sqrt{\sqrt{2}-1}$ (så att detta intervall avbildas injektivt på $0 < t < 1$). Dessutom:

$$\sqrt{1-t^4} = \sqrt{1 - \frac{16r^4(1-r^4)^2}{(1+r^4)^4}} = \frac{\sqrt{(1+r^4)^2 - 16r^4(1-r^4)^2}}{(1+r^4)^2} \stackrel{(!)}{=} \frac{\sqrt{(1-6r^4+r^8)^2}}{(1+r^4)^2} = \frac{1-6r^4+r^8}{(1+r^4)^2}.$$

Alltså $\frac{2dr}{\sqrt{1-r^4}} = \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$. Klart!

Låt oss jämföra med motsvarande formel för arcsin-integralen:

$$2 \int_0^S \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} = \int_0^{2S\sqrt{1-S^2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \quad \left(0 \leq S \leq 1/\sqrt{2}\right)$$

Bevis. Variabelbytet $t = 2s\sqrt{1-s^2}$ har derivatan

$$\frac{dt}{ds} = \frac{2}{\sqrt{1-s^2}} \cdot (1-2s^2)$$

som är positiv för $0 < s < 1/\sqrt{2}$ (så att detta intervall avbildas injektivt på $0 < t < 1$). Dessutom:

$$\sqrt{1-t^2} = \sqrt{1-4s^2(1-s^2)} = \sqrt{1-4s^2+4s^4} \stackrel{(!)}{=} \sqrt{(1-2s^2)^2} = 1-2s^2.$$

Alltså $\frac{2ds}{\sqrt{1-s^2}} = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$. Klart!

Men vad är detta för formel egentligen?

Men vad är detta för formel egentligen?

Sambandet

$$2 \int_0^S \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} = \int_0^T \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

kan skrivas som

$$2 \arcsin S = \arcsin T.$$

Men vad är detta för formel egentligen?

Sambandet

$$2 \int_0^S \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} = \int_0^T \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

kan skrivas som

$$2 \arcsin S = \arcsin T.$$

Detta betyder att T måste ges av

$$T = \sin(2 \arcsin S) = 2 \sin(\arcsin S) \cos(\arcsin S) = 2S\sqrt{1-S^2}$$

enligt **formeln för sinus av dubbla vinkeln**.

Men vad är detta för formel egentligen?

Sambandet

$$2 \int_0^S \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} = \int_0^T \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

kan skrivas som

$$2 \arcsin S = \arcsin T.$$

Detta betyder att T måste ges av

$$T = \sin(2 \arcsin S) = 2 \sin(\arcsin S) \cos(\arcsin S) = 2S\sqrt{1-S^2}$$

enligt **formeln för sinus av dubbla vinkeln**.

Det vi visade på förra sidan var med andra ord bara ett specialfall av denna formel, där vinkeln som ska dubbleras (alltså $\arcsin S$) ligger i intervallet $[0, \pi/4]$.

Vi är såklart vana vid att börja med de trigonometriska funktionerna, och sedan definiera arcusfunktionerna genom att invertera.

Vi är såklart vana vid att börja med de trigonometriska funktionerna, och sedan definiera arcusfunktionerna genom att invertera.

Men föreställ er en värld utan trigonometri, där man hade studerat vår arcsin-funktion i form av integralen

$$f(x) = \int_0^x \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} \quad \text{för } 0 \leq x \leq 1 \text{ (eller möjligen } -1 \leq x \leq 1)$$

i över hundra år, innan någon kom på att det kunde vara användbart att istället arbeta med dess *inversa funktion* (alltså vår sinusfunktion), utvidgad till att vara definierad på hela $\mathbf{R}$, eller t.o.m. på hela $\mathbf{C}$.

Vi är såklart vana vid att börja med de trigonometriska funktionerna, och sedan definiera arcusfunktionerna genom att invertera.

Men föreställ er en värld utan trigonometri, där man hade studerat vår arcsin-funktion i form av integralen

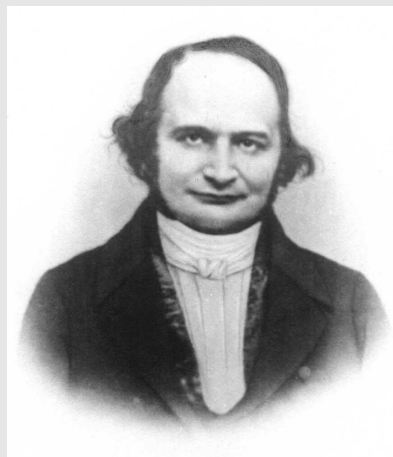
$$f(x) = \int_0^x \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} \quad \text{för } 0 \leq x \leq 1 \text{ (eller möjligen } -1 \leq x \leq 1)$$

i över hundra år, innan någon kom på att det kunde vara användbart att istället arbeta med dess *inversa funktion* (alltså vår sinusfunktion), utvidgad till att vara definierad på hela $\mathbf{R}$, eller t.o.m. på hela $\mathbf{C}$.

Ungefär så var det med elliptiska integraler och deras inverser, de **elliptiska funktionerna!**

Elliptiska funktioner

Teorin utvecklades framför allt av **Niels Henrik Abel** (1802–29) och **Carl Gustav Jacob Jacobi** (1804–51).



(Bilder: Wikimedia Commons.)

(Gauss hade undersökt inversen till $\int_0^x \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}}$ redan år 1797, dock utan att publicera sina resultat.)

1.

Integralia maxime memorabilia, quae Formula exhibentur $\int \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}}$, et quae Functionum Ellipticarum, quae dicuntur, primam speciem constituunt, ab Argumento duplici pendent, et ab Amplitudine ϕ et a Modulo k . Eiusmodi functionis inter se comparatis valoribus, quos illa pro diversis Amplitudinibus obtinet, eodem manente Modulo, egregia multa detexerant Analystae, quae Additionem eorum et Multiplicationem spectant. Quam nuper vidimus quaestionem a Cl. *Abel* in Commentatione, nostra laude maiore, mirum in modum provectam esse (V. *Crelle Journal für reine und angewandte Mathematik* V. II.).

C. G. J. Jacobi, *Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum* (1829)

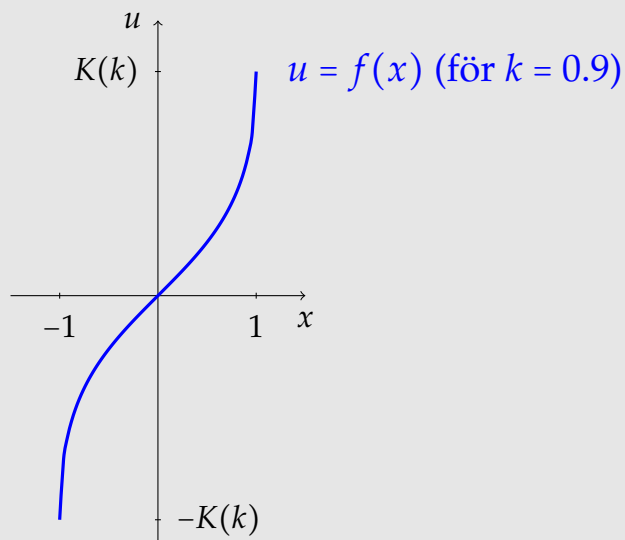
1.

Integralia maxime memorabilia, quae Formula exhibentur $\int \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}}$, et quae Functionum Ellipticarum, quae dicuntur, **primam speciem** constituunt, ab Argumento duplici pendent, et ab **Amplitudine ϕ** et a **Modulo k** . Eiusmodi functionis inter se comparatis valoribus, quos illa pro diversis Amplitudinibus obtinet, eodem manente Modulo, egregia multa detexerant Analystae, quae Additionem eorum et Multiplicationem spectant. Quam nuper vidimus quaestionem a Cl. *Abel* in Commentatione, nostra laude maiore, mirum in modum provectam esse (V. *Crelle Journal für reine und angewandte Mathematik* V. II.).

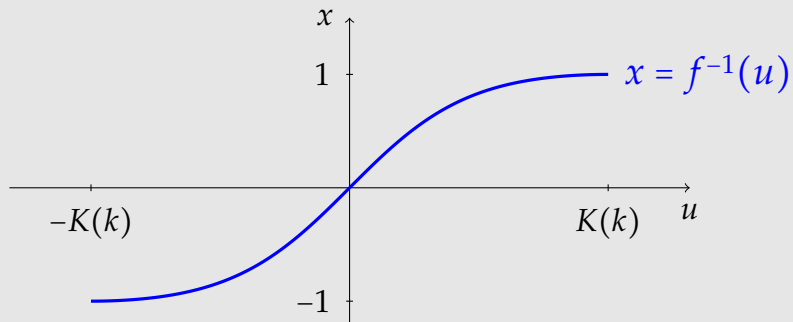
C. G. J. Jacobi, *Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum* (1829)

Fixera en modul k mellan 0 och 1 och betrakta den ofullständiga elliptiska integralen av första slaget:

$$u = f(x) = \int_0^x \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}} \quad (-1 \leq x \leq 1).$$



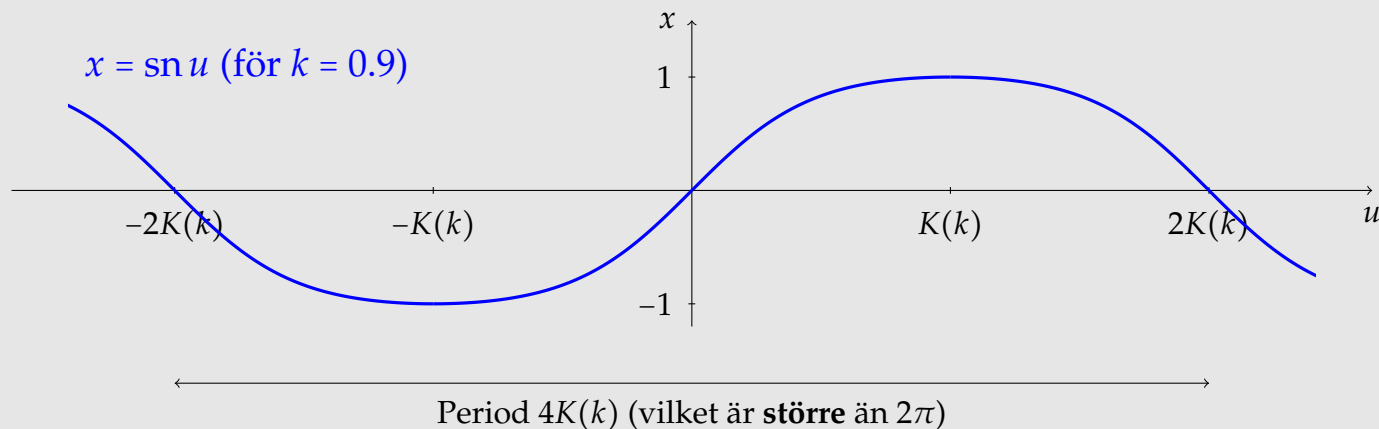
Grafen för inversen fås som vanligt genom att vända på bilden så att axlarna byter plats:



Visst känns det som att denna funktion "vill" fortsätta periodiskt, på samma sätt som sinus-funktionen?

Om vi låter den göra detta får vi en elliptisk funktion som Jacobi kallade för *sinus amplitudinis*, "sinus av amplituden".

Beteckning: $\text{sn}(u, k)$ (eller bara $\text{sn } u$ ifall k är underförstått).



Förklaring av namnet *sinus amplitudinis*

Via variabelbytet $s = \sin \varphi$ (där $|\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$) kan integralen skrivas

$$u = \int_0^x \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}} = \int_0^\theta \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \quad \text{där } x = \sin \theta.$$

Här kan u betraktas som funktion av x (som innan), men även som funktion av θ .

Förklaring av namnet *sinus amplitudinis*

Via variabelbytet $s = \sin \varphi$ (där $|\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$) kan integralen skrivas

$$u = \int_0^x \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}} = \int_0^\theta \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \quad \text{där } x = \sin \theta.$$

Här kan u betraktas som funktion av x (som innan), men även som funktion av θ .

Funktionen $u = u(\theta)$ har en invers $\theta = \theta(u)$ som Jacobi kallar **amplituden** för u .

Skrivsätt: $\theta(u) = \text{am } u$. (Strängt växande. $D_{\text{am}} = V_{\text{am}} = \mathbf{R}$.)

Förklaring av namnet *sinus amplitudinis*

Via variabelbytet $s = \sin \varphi$ (där $|\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$) kan integralen skrivas

$$u = \int_0^x \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}} = \int_0^\theta \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \quad \text{där } x = \sin \theta.$$

Här kan u betraktas som funktion av x (som innan), men även som funktion av θ .

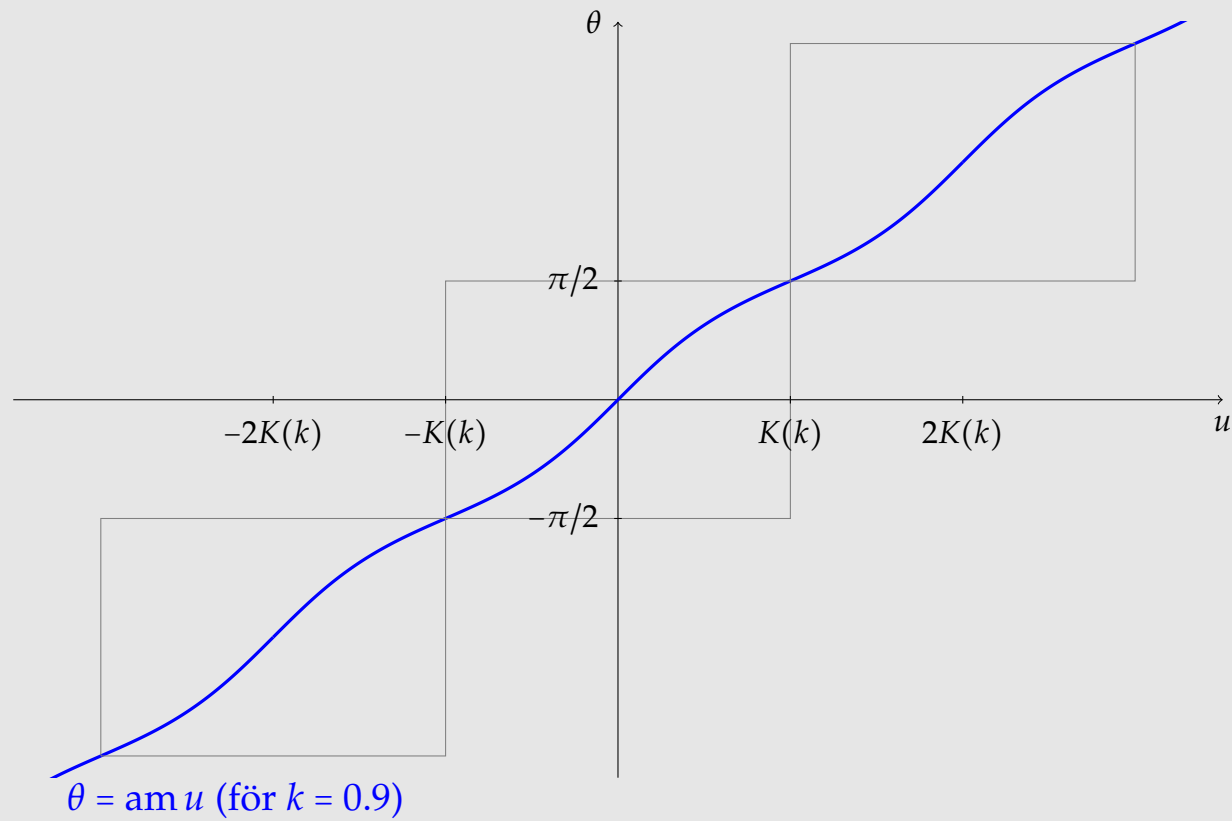
Funktionen $u = u(\theta)$ har en invers $\theta = \theta(u)$ som Jacobi kallar **amplituden** för u .

Skrivsätt: $\theta(u) = \text{am } u$. (Strängt växande. $D_{\text{am}} = V_{\text{am}} = \mathbf{R}$.)

Vår tidigare invers $x = x(u)$ (för $|u| \leq K(k)$) till funktionen $u = u(x)$ blir då **sinus av amplituden**, på grund av sambandet $x = \sin \theta$:

$$x(u) = \sin \theta(u) = \sin \text{am } u.$$

Vi tar detta som definition av $x = \text{sn } u$ för alla $u \in \mathbf{R}$.



Jacobi skrev själv alltid **sin am**. Beteckningen **sn** infördes senare, av **Christoph Gudermann** (1798–1852).

Jacobi skrev själv alltid **sin am**. Beteckningen **sn** infördes senare, av **Christoph Gudermann** (1798–1852).

Funktionen *cosinus amplitudinis*, alltså **cosinus av amplituden**, skrevs såklart **cos am** av Jacobi. Gudermann döpte om den till **cn**.

Trigonometriska ettan medför att $\operatorname{cn}^2 u + \operatorname{sn}^2 u = 1$.

Jacobi skrev själv alltid **sin am**. Beteckningen **sn** infördes senare, av **Christoph Gudermann** (1798–1852).

Funktionen *cosinus amplitudinis*, alltså **cosinus av amplituden**, skrevs såklart **cos am** av Jacobi. Gudermann döpte om den till **cn**.

Trigonometriska ettan medför att $\text{cn}^2 u + \text{sn}^2 u = 1$.

Legendre införde beteckningen $\Delta(\varphi) = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}$, och vi har även *delta amplitudinis*, alltså **delta av amplituden**:

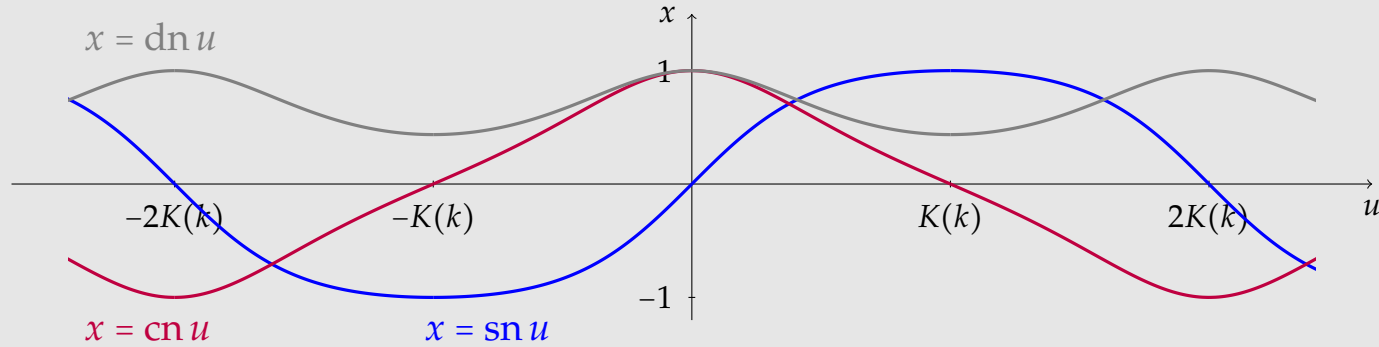
$$\Delta \text{ am } u = \Delta(\text{am } u) = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \text{am } u} = \sqrt{1 - k^2 (\sin \text{am } u)^2}$$

som i Gudermanns notation skrivs

$$\text{dn } u = \sqrt{1 - k^2 \text{sn}^2 u}.$$

Den uppfyller (per definition) $\text{dn}^2 u + k^2 \text{sn}^2 u = 1$.

Här är Jacobis tre elliptiska funktioner ihop (för $k = 0.9$):



Derivatan av *sinus amplitudinis*

$$u = \int_0^{\text{am } u} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \xrightarrow{d/du} 1 = \frac{\frac{d}{du} \text{am } u}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \text{am } u}} \implies \boxed{\frac{d}{du} \text{am } u = \Delta(\text{am } u)}$$

Därmed, enligt kedjeregeln:

$$\boxed{\frac{d}{du} \sin(\text{am } u) = \cos(\text{am } u) \cdot \Delta(\text{am } u)}$$

Med andra ord:

$$\boxed{\frac{d}{du} \text{sn } u = \text{cn } u \cdot \text{dn } u}$$

Derivatorna av de andra funktionerna fås på liknande sätt:

$$\begin{aligned}\frac{d}{du} \operatorname{sn} u &= \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \\ \frac{d}{du} \operatorname{cn} u &= -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u \\ \frac{d}{du} \operatorname{dn} u &= -k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u\end{aligned}$$

Om man vill kan man börja teorin i denna ände, genom att se detta som ett system av differentialekvationer som *definierar* funktionerna $\operatorname{sn}/\operatorname{cn}/\operatorname{dn}$ när man ger de rätta begynnelsevillkoren:

$$\begin{aligned}\operatorname{sn} 0 &= 0 \\ \operatorname{cn} 0 &= 1 \\ \operatorname{dn} 0 &= 1\end{aligned}$$

Funktionerna sn, cn och dn uppfyller ett myller av identiteter som påminner om trigonometriska formler – fast mer komplicerade!

T.ex. additionsformlerna:

$$\operatorname{sn}(u + v) = \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v + \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \operatorname{sn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}$$

$$\operatorname{cn}(u + v) = \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{cn} v - \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u \operatorname{sn} v \operatorname{dn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}$$

$$\operatorname{dn}(u + v) = \frac{\operatorname{dn} u \operatorname{dn} v - k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{sn} v \operatorname{cn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}$$

Det fanns en tid när studenter förväntades lära sig detta!

x

THE APPLICATIONS OF ELLIPTIC FUNCTIONS.

According to the new regulations for the Mathematical Tripos at Cambridge, to come into force in the examination in May 1893, the schedule II. of Part I. includes “Elementary Elliptic Functions, excluding the Theta Functions and the theory of Transformation”; so it is to be hoped that this reintroduction of Elliptic Functions into the ordinary mathematical curriculum will cause the subject to receive more general attention and study. These Applications have been put together with the idea of covering this ground by exhibiting their practical importance in Applied Mathematics, and of securing the interest of the student, so that he may if he wishes follow with interest the analytical treatises already mentioned.

A. G. Greenhill, *The Applications of Elliptic Functions* (1892)

Några av de identiteter som vi har sett tidigare medför ett samband mellan sn-funktionen och dess derivata:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{du} \operatorname{sn} u &= \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \\ \operatorname{cn}^2 u + \operatorname{sn}^2 u &= 1 \\ \operatorname{dn}^2 u + k^2 \operatorname{sn}^2 u &= 1 \end{aligned} \right\} \implies \boxed{\left(\frac{d}{du} \operatorname{sn} u \right)^2 = (1 - \operatorname{sn}^2 u)(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u)}$$

$w = \operatorname{sn}(z, k)$ uppfyller alltså ODE:n $\left(\frac{dw}{dz} \right)^2 = (1 - k^2 w^2)(1 - w^2)$ med bivillkoren $w(0) = 0$ och $\frac{dw}{dz}(0) > 0$.

Detta kan även inses direkt för den del av $\operatorname{sn} u$ -kurvan där $|u| \leq K(k)$, såhär:

$$u = \int_0^{\operatorname{sn} u} \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2 s^2)}} \xrightarrow{d/du} 1 = \frac{\frac{d}{du} \operatorname{sn} u}{\sqrt{(1-\operatorname{sn}^2 u)(1-k^2 \operatorname{sn}^2 u)}}.$$

Den matematiska pendeln (igen)

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\omega^2 \sin \varphi \quad \text{där } \omega = \sqrt{g/L} \quad \left(\text{Antag } \varphi(0) = 0 \text{ och } \frac{d\varphi}{dt}(0) > 0. \right)$$

Med $z = \omega t$ fås $\frac{d^2\varphi}{dz^2} + \sin \varphi = 0$ och därmed $\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 - \cos \varphi = \text{konstant}$, där konstanten fås genom insättning av maximala utslagsvinkeln α (där ju $\frac{d\varphi}{dz} = 0$): $\frac{1}{2} \cdot 0^2 - \cos \alpha = -(1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}) = 2k^2 - 1$ om $k = \sin \frac{\alpha}{2}$.

Låt $w = \frac{1}{k} \sin \frac{\varphi}{2}$. Då är $\frac{dw}{dz} = \frac{1}{k} \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \frac{1}{2} \frac{d\varphi}{dz}$, så $\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 = \frac{1}{4k^2} \cos^2 \frac{\varphi}{2} \cdot \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 = \frac{1}{4k^2} \cos^2 \frac{\varphi}{2} \cdot 2(2k^2 - 1 + \cos \varphi) = \cos^2 \frac{\varphi}{2} \cdot \frac{1}{4k^2} \cdot 2(2k^2 - 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}) = (1 - \sin^2 \frac{\varphi}{2}) \cdot (1 - \frac{1}{k^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}) = (1 - k^2 w^2)(1 - w^2)$.

Dessutom är $w = 0$ och $\frac{dw}{dz} > 0$ då $z = 0$. Slutsats:

$$w(z) = \text{sn}(z, k)$$

dvs.

$$\varphi(t) = 2 \arcsin(k \text{sn}(\omega t, k)) \quad \left(k = \sin \frac{\alpha}{2}\right)$$

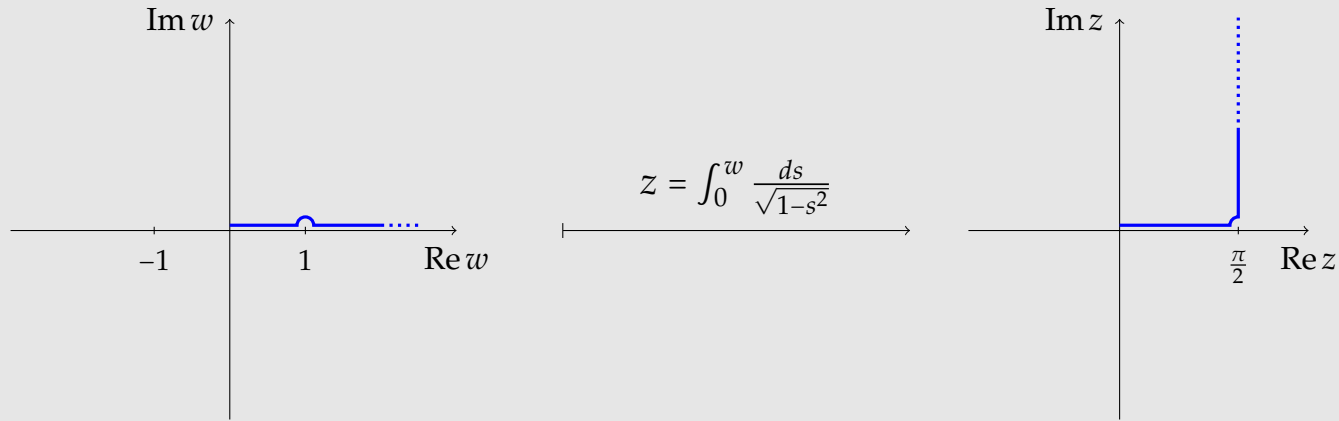
Elliptiska funktioner i komplex analys

Elliptiska funktioner visar inte hela sitt rätta jag förrän man låter deras in- och utdata vara **komplexa** tal!

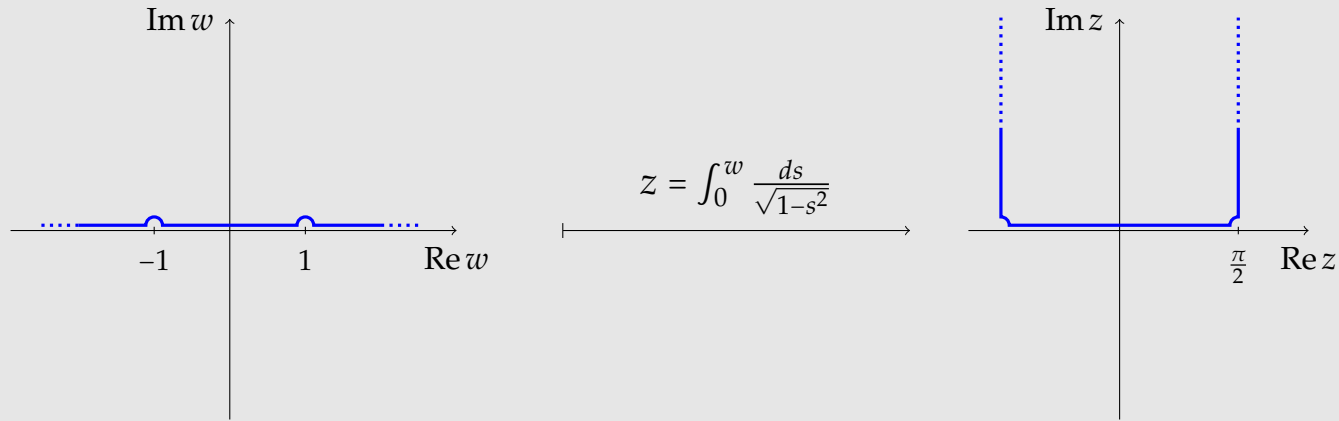
T.ex. har funktionen $w = \operatorname{sn}(z, k)$ (för $0 < k < 1$) inte bara den reella perioden $4K(k)$ utan också en rent imaginär period $2iK'(k)$ där

$$\begin{aligned} K'(k) &:= \int_1^{1/k} \frac{ds}{\sqrt{-(1-s^2)(1-k^2s^2)}} \\ &= \left[s = \frac{1}{\sqrt{1-(1-k^2)t^2}} \right] \\ &= \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-(1-k^2)t^2)}} = K(\sqrt{1-k^2}) = K(k'). \end{aligned}$$

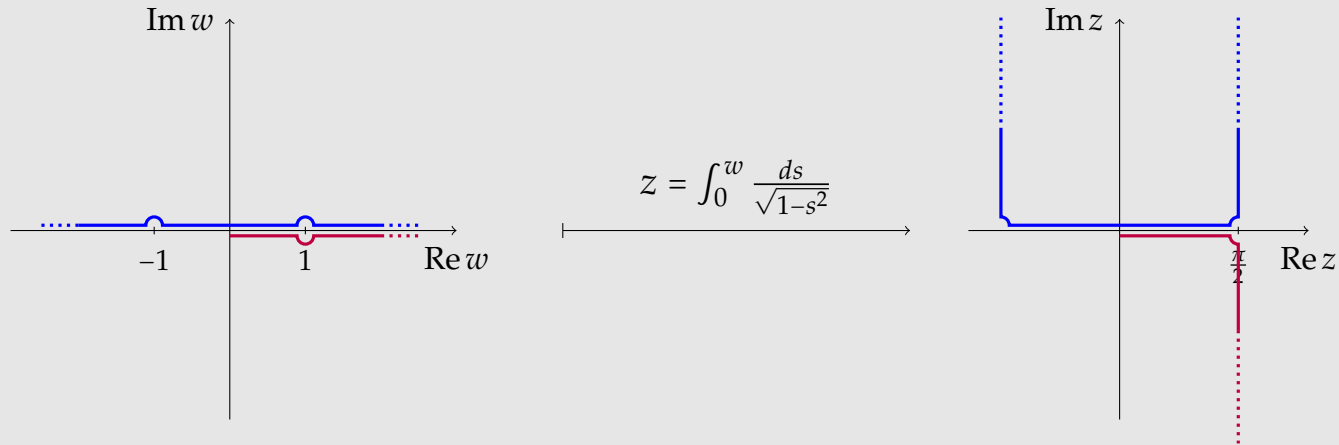
För att förstå detta, betrakta först den komplexa sinusfunktionen $w = \sin z$ utgående från arcsin-integralen:



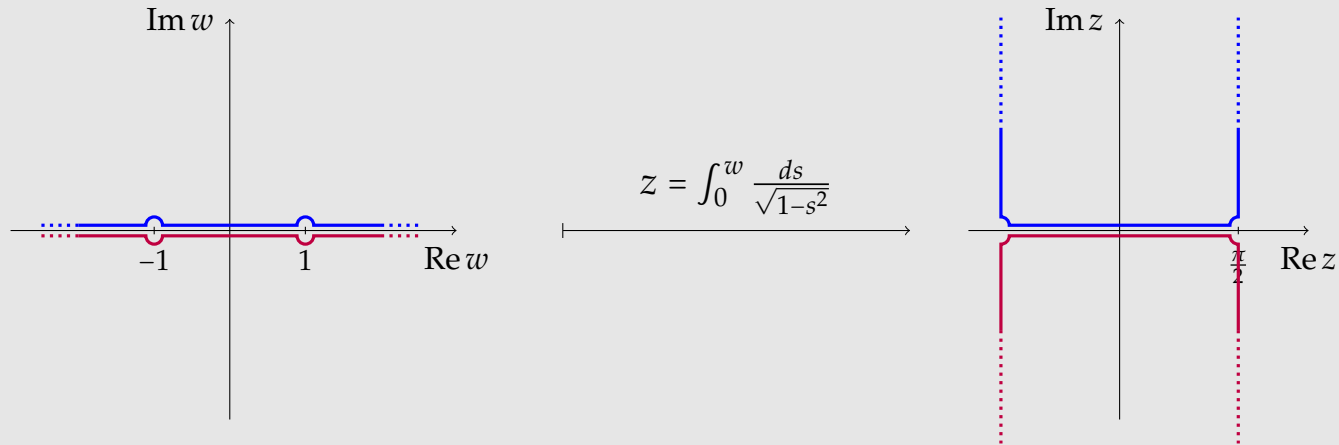
För att förstå detta, betrakta först den komplexa sinusfunktionen $w = \sin z$ utgående från arcsin-integralen:



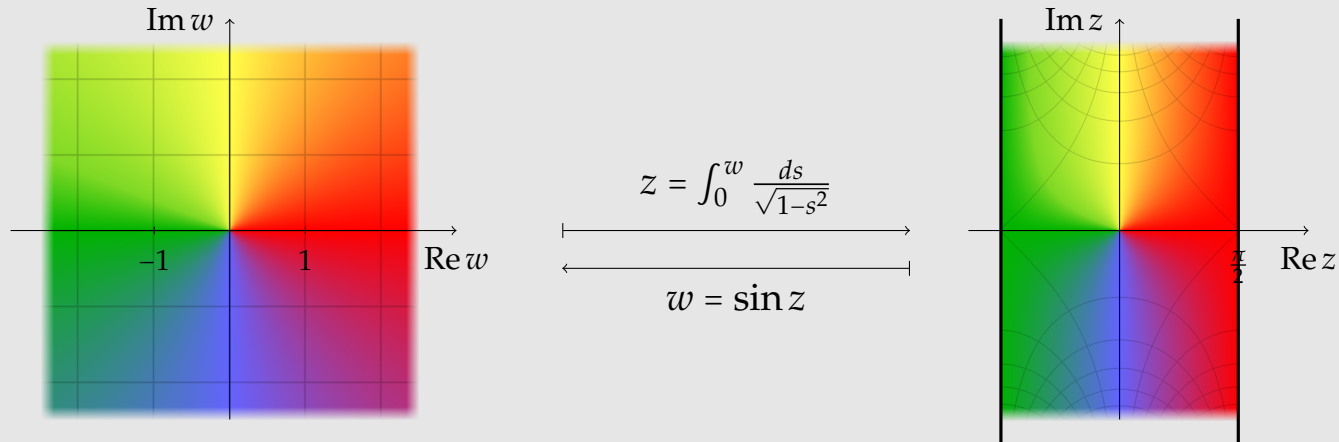
För att förstå detta, betrakta först den komplexa sinusfunktionen $w = \sin z$ utgående från arcsin-integralen:

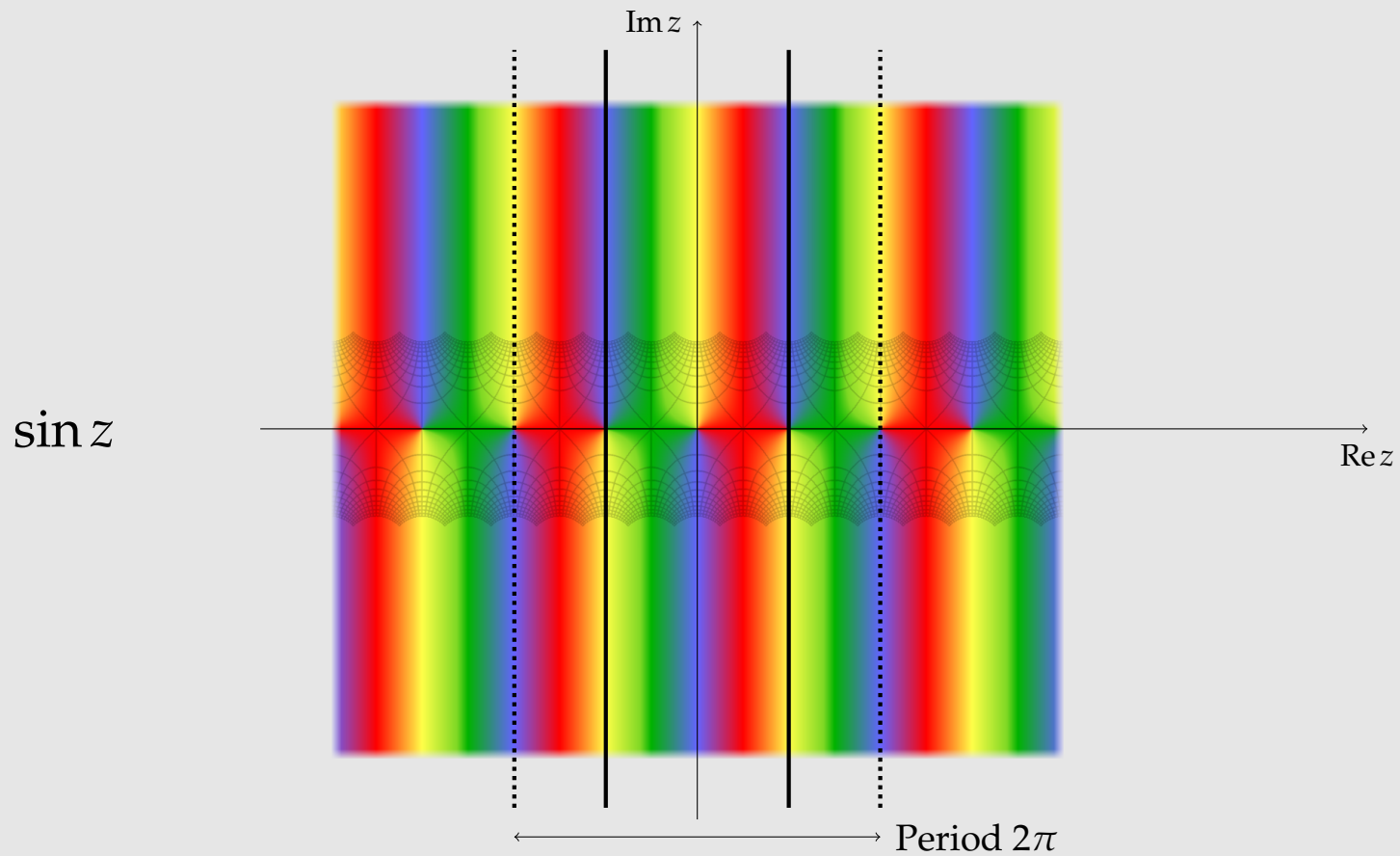


För att förstå detta, betrakta först den komplexa sinusfunktionen $w = \sin z$ utgående från arcsin-integralen:

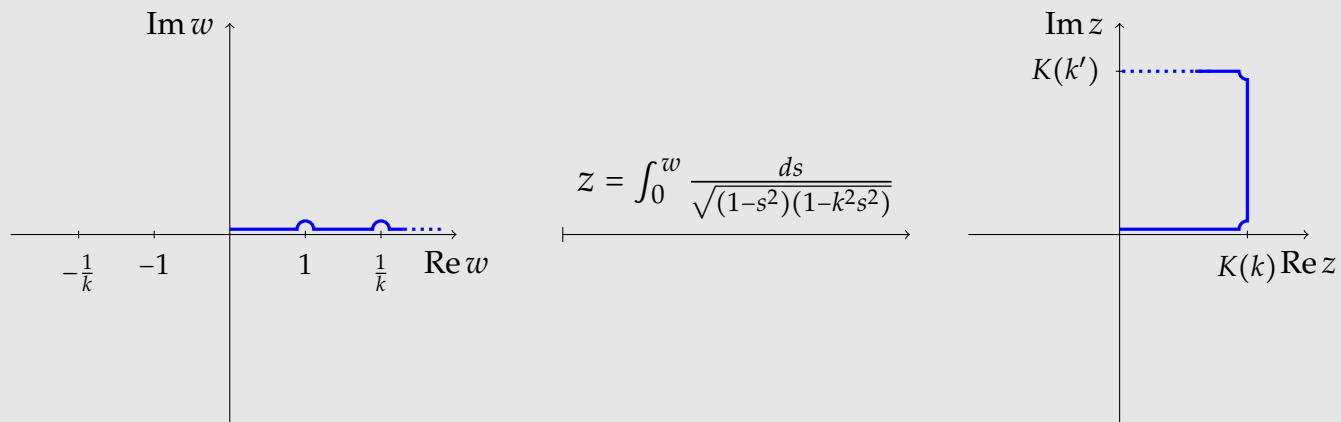


För att förstå detta, betrakta först den komplexa sinusfunktionen
 $w = \sin z$ utgående från arcsin-integralen:

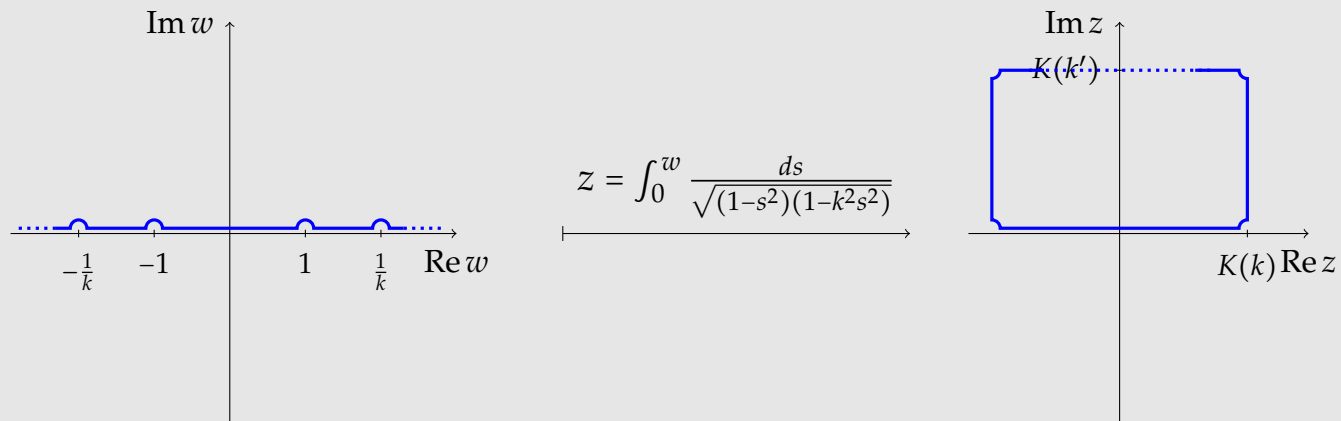




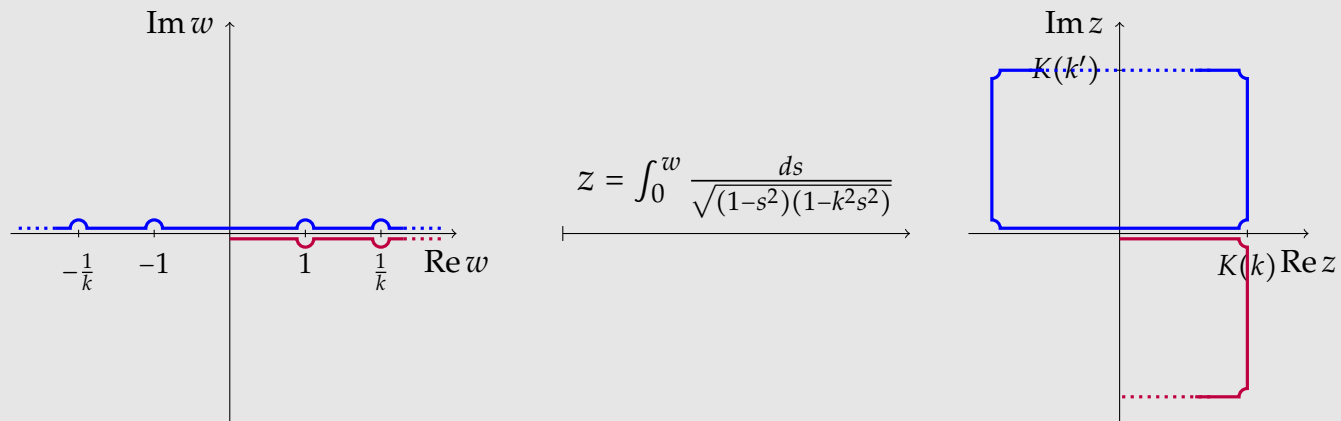
Och nu integralen som $w = \operatorname{sn}(z, k)$ är invers till:



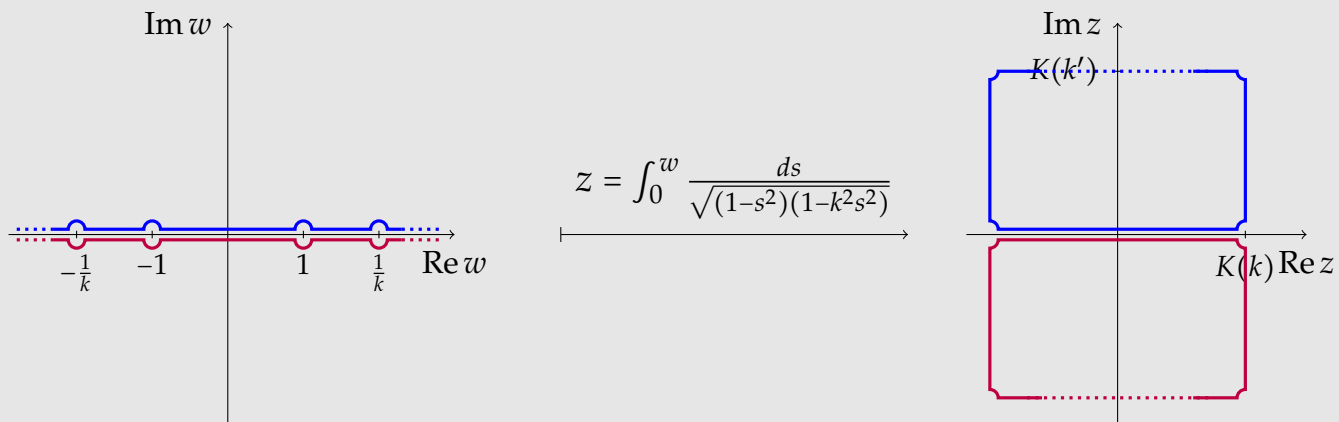
Och nu integralen som $w = \operatorname{sn}(z, k)$ är invers till:



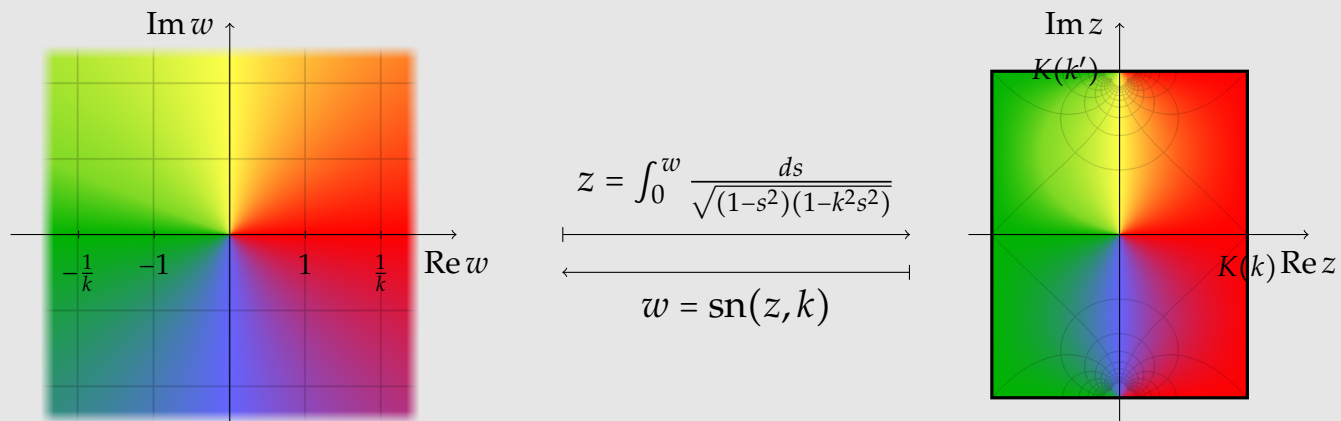
Och nu integralen som $w = \operatorname{sn}(z, k)$ är invers till:

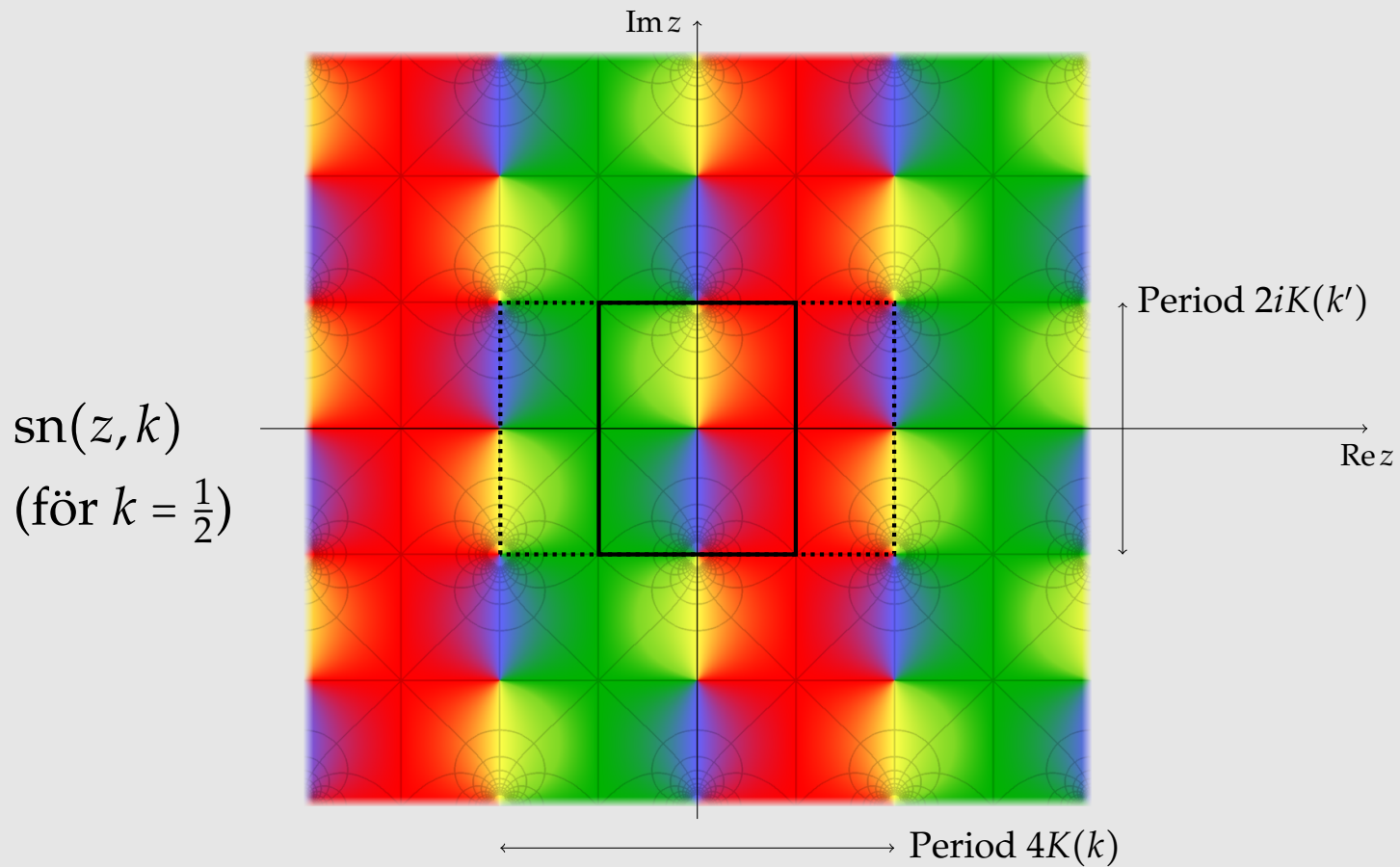


Och nu integralen som $w = \operatorname{sn}(z, k)$ är invers till:



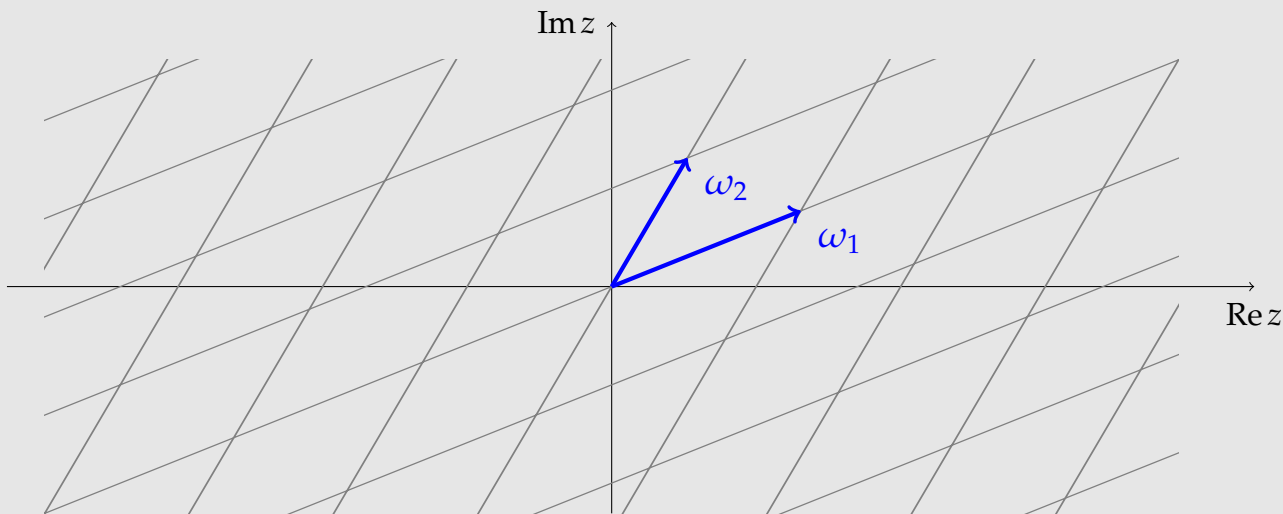
Och nu integralen som $w = \operatorname{sn}(z, k)$ är invers till:





Den allmänna definitionen av elliptiska funktioner

Med **elliptisk funktion** menas en funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ som är **meromorf** (dvs. analytisk förutom att isolerade poler också är tillåtna) samt **dubbelperiodisk**.



Karl Weierstrass (1815–97) gav ett sätt att konstruera en elliptisk funktion med en dubbelpol i origo och godtyckliga perioder ω_1 och ω_2 . Den betecknas med ett särskilt "skrivstils-p", $\wp(z)$.

Karl Weierstrass (1815–97) gav ett sätt att konstruera en elliptisk funktion med en dubbelpol i origo och godtyckliga perioder ω_1 och ω_2 . Den betecknas med ett särskilt "skrivstils-p", $\wp(z)$.

Idén är att lägga en translaterad kopia av funktionen $1/z^2$ i varje gitterpunkt i period-rutnätet och addera dem allihop:

$$L = \mathbf{Z}\omega_1 + \mathbf{Z}\omega_2 = \{n_1\omega_1 + n_2\omega_2 : n_1, n_2 \in \mathbf{Z}\}$$

$$\wp(z) \stackrel{?}{=} \sum_{\omega \in L} \frac{1}{(z - \omega)^2}$$

Karl Weierstrass (1815–97) gav ett sätt att konstruera en elliptisk funktion med en dubbelpol i origo och godtyckliga perioder ω_1 och ω_2 . Den betecknas med ett särskilt "skrivstils-p", $\wp(z)$.

Idén är att lägga en translaterad kopia av funktionen $1/z^2$ i varje gitterpunkt i period-rutnätet och addera dem allihop:

$$L = \mathbf{Z}\omega_1 + \mathbf{Z}\omega_2 = \{n_1\omega_1 + n_2\omega_2 : n_1, n_2 \in \mathbf{Z}\}$$

$$\wp(z) \stackrel{?}{=} \sum_{\omega \in L} \frac{1}{(z - \omega)^2}$$

Detta är dock tyvärr en *divergent* serie!

Karl Weierstrass (1815–97) gav ett sätt att konstruera en elliptisk funktion med en dubbelpol i origo och godtyckliga perioder ω_1 och ω_2 . Den betecknas med ett särskilt "skrivstils-p", $\wp(z)$.

Idén är att lägga en translaterad kopia av funktionen $1/z^2$ i varje gitterpunkt i period-rutnätet och addera dem allihop:

$$L = \mathbf{Z}\omega_1 + \mathbf{Z}\omega_2 = \{n_1\omega_1 + n_2\omega_2 : n_1, n_2 \in \mathbf{Z}\}$$

$$\wp(z) \stackrel{?}{=} \sum_{\omega \in L} \frac{1}{(z - \omega)^2}$$

Detta är dock tyvärr en *divergent* serie!

Men det går att rädda situationen med en liten korrektion:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

Man kan visa att Weierstrass-funktionen $w = \wp(z)$ uppfyller ODE:n

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 = 4w^3 - g_2w - g_3$$

där koefficienterna g_2 och g_3 beror på perioderna ω_1 och ω_2 :

$$g_2 = 60 \sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^4}$$
$$g_3 = 140 \sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^6}$$

Elliptiska kurvor

En **elliptisk kurva** (över $\mathbf{R}$ eller över $\mathbf{C}$) består av alla punkter (x, y) (i $\mathbf{R}^2$ resp. $\mathbf{C}^2$) som uppfyller ekvationen

$$y^2 = p(x)$$

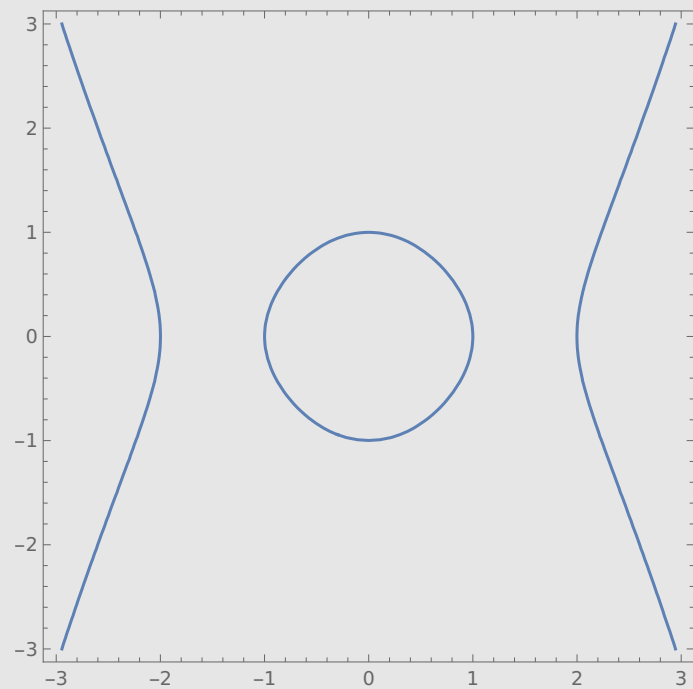
där $p(x)$ är ett polynom av grad 3 eller 4 med enkelrötter enbart.

T.ex.

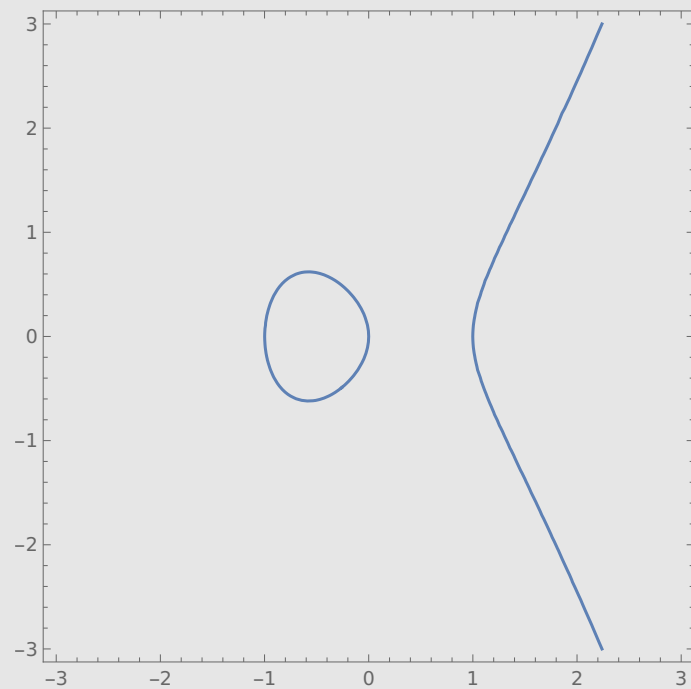
$$y^2 = (1 - x^2)(1 - k^2 x^2) \quad (0 < k < 1)$$

eller

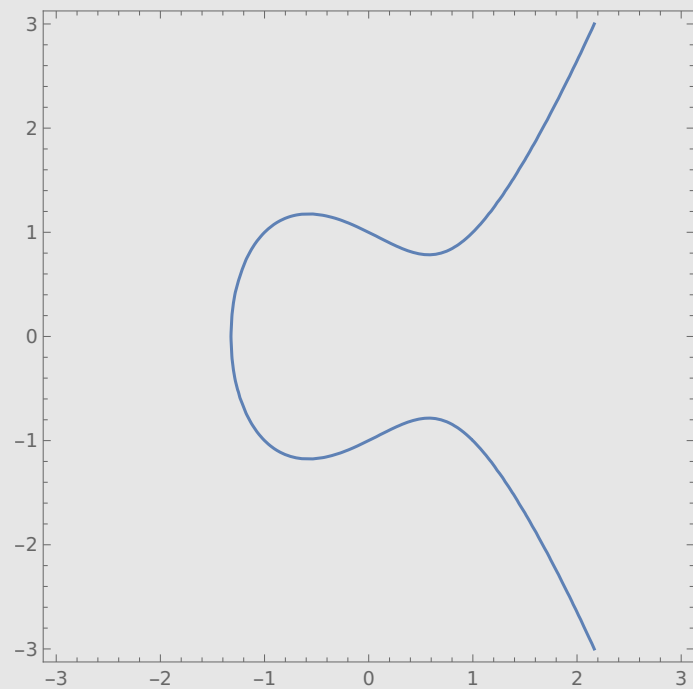
$$y^2 = x^3 + ax + b \quad (4a^3 + 27b^2 \neq 0).$$



$$y^2 = (1 - x^2)(1 - \frac{1}{4}x^2)$$



$$y^2 = x^3 - x$$



$$y^2 = x^3 - x + 1$$

Elliptiska kurvor parametreras av elliptiska funktioner

Vi har sett att $w = \operatorname{sn} z$ uppfyller ODE:n

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 = (1 - w^2)(1 - k^2 w^2)$$

och att $w = \wp(z)$ uppfyller ODE:n

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 = 4w^3 - g_2 w - g_3.$$

Elliptiska kurvor parametreras av elliptiska funktioner

Vi har sett att $w = \operatorname{sn} z$ uppfyller ODE:n

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 = (1 - w^2)(1 - k^2 w^2)$$

och att $w = \wp(z)$ uppfyller ODE:n

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 = 4w^3 - g_2 w - g_3.$$

Alltså är $(x, y) = (\operatorname{sn} z, \frac{d}{dz} \operatorname{sn} z)$ en parametrisering av kurvan

$$y^2 = (1 - x^2)(1 - k^2 x^2)$$

och $(x, y) = (\wp(z), \frac{d}{dz} \wp(z))$ en parametrisering av kurvan

$$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3.$$

Allmänt gäller att

$$(x, y) = (f(z), f'(z))$$

är en parametrisering av den elliptiska kurvan $y^2 = p(x)$ ifall f är en elliptisk funktion som inverterar integralen

$$\int \frac{ds}{\sqrt{p(s)}}.$$

Allmänt gäller att

$$(x, y) = (f(z), f'(z))$$

är en parametrisering av den elliptiska kurvan $y^2 = p(x)$ ifall f är en elliptisk funktion som inverterar integralen

$$\int \frac{ds}{\sqrt{p(s)}}.$$

Jämför med $(x, y) = (\sin z, \cos z)$ som är en parametrisering av enhetscirkeln $y^2 = 1 - x^2$, där sinusfunktionen inverterar arcsin-integralen

$$\int \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}}$$

och där cosinusfunktionen är derivatan av sinusfunktionen.

Addition på elliptiska kurvor

Betrakta en elliptisk kurva parameteriserad på ovanstående vis,
 $(x, y) = (f(z), f'(z))$.

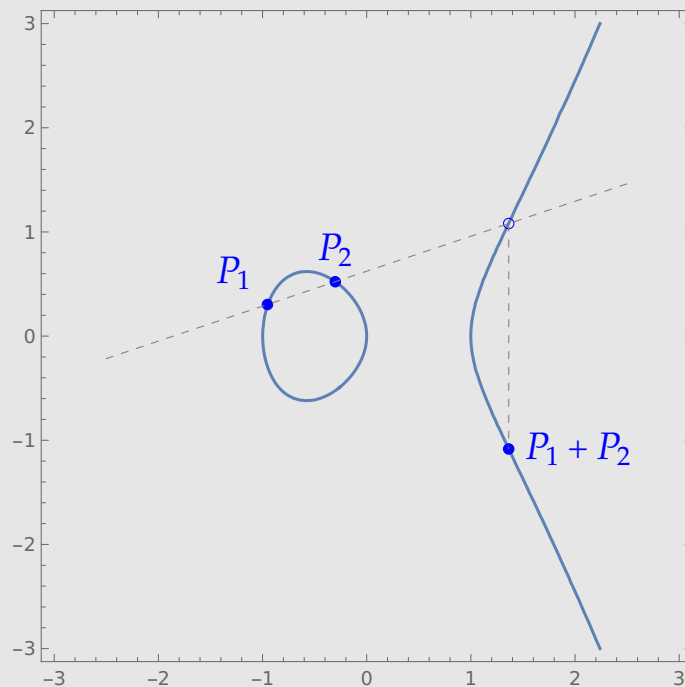
Givet två punkter P_1 och P_2 på kurvan, låt z_1 och z_2 vara deras motsvarande parametervärden, och låt Q vara den punkt på kurvan som har parametervärdet $z_1 + z_2$.

Detta definierar en (kommutativ och associativ) additionsoperation på kurvan:

$$Q = P_1 + P_2$$

(Parametrarna z_1 och z_2 är inte entydigt bestämda, men Q beror inte på valet av dessa, eftersom summan $z_1 + z_2$ är välbestämd modulo perioderna ω_1 och ω_2 .)

För $y^2 = x^3 + ax + b$ kan $Q = P_1 + P_2$ konstrueras geometriskt:



(Om $P_1 = P_2$ så drar man kurvans *tangent* i den punkten.)

Antag att kurvan är $y^2 = p(x)$ där p är ett polynom med *rationella* koefficienter.

Om då P_1 och P_2 är rationella punkter på kurvan (dvs. punkter på kurvan som tillhör $\mathbf{Q}^2$) så kommer $P_1 + P_2$ att vara det också.

Att hitta rationella punkter på elliptiska kurvor är av stort intresse inom **talteori**.

(Wiles' bevis för Fermats stora sats, kryptografi, ...)

Slutligen, åter till "95% of people cannot solve this!"

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} = 4.$$

$(a, b, c) = (4, -1, 11)$ är en lösning, men inte positiv.

Slutligen, åter till "95% of people cannot solve this!"

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} = 4.$$

$(a, b, c) = (4, -1, 11)$ är en lösning, men inte positiv.

Multiplitera med $(a+b)(a+c)(b+c)$ och utveckla:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3(a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2) - 5abc = 0.$$

Slutligen, åter till "95% of people cannot solve this!"

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} = 4.$$

$(a, b, c) = (4, -1, 11)$ är en lösning, men inte positiv.

Multiplitera med $(a+b)(a+c)(b+c)$ och utveckla:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3(a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2) - 5abc = 0.$$

Låt $a = 56 - x + y$, $b = 56 - x - y$, $c = -56 - 12x$ och förenkla. Detta ger en elliptisk kurva:

$$y^2 = x^3 + 109x^2 + 224x.$$

Slutligen, åter till "95% of people cannot solve this!"

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} = 4.$$

$(a, b, c) = (4, -1, 11)$ är en lösning, men inte positiv.

Multiplitera med $(a+b)(a+c)(b+c)$ och utveckla:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3(a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2) - 5abc = 0.$$

Låt $a = 56 - x + y$, $b = 56 - x - y$, $c = -56 - 12x$ och förenkla. Detta ger en elliptisk kurva:

$$y^2 = x^3 + 109x^2 + 224x.$$

Punkten P med koordinaterna $(x, y) = (-100, 260)$ är en rationell punkt på denna kurva. (Den motsvarar $(a, b, c) = 104(4, -1, 11)$.)

Beräkna $2P = P + P$, $3P = P + P + P$, etc., upp till $9P$ som är den första punkten i denna följd som ger *positiva* värden på (a, b, c) .

Beräkna $2P = P + P$, $3P = P + P + P$, etc., upp till $9P$ som är den första punkten i denna följd som ger *positiva* värden på (a, b, c) .

Dessa positiva värden ger den lösning med 79/80/81-siffriga tal som vi såg i början av föreläsningen (och man kan bevisa att detta verkligen är den minsta lösningen).

Beräkna $2P = P + P$, $3P = P + P + P$, etc., upp till $9P$ som är den första punkten i denna följd som ger *positiva* värden på (a, b, c) .

Dessa positiva värden ger den lösning med 79/80/81-siffriga tal som vi såg i början av föreläsningen (och man kan bevisa att detta verkligen är den minsta lösningen).

För ekvationen

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} = 178$$

har det största talet i den minsta lösningen 398 605 460 siffror. Och för

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} = 896$$

krävs mer än $2 \cdot 10^{12}$ siffror!

A. Bremner & A. Macleod, An unusual cubic representation problem, *Annales Mathematicae et Informaticae* (2014)