

**Om talet  $\pi = 3,1415926535\dots$**

**Hans Lundmark, MAI**

**TATA40 Matematiska utblickar**

**(okt 2024)**

Talet  $\pi$  är känt sedan antiken som förhållandet mellan **omkretsen** och **diametern** hos en godtycklig cirkel:

$$\pi = \frac{O}{d}$$

(Det är inte helt självklart att det är samma förhållande för alla cirklar! Så är det t.ex. inte i sfärisk eller hyperbolisk geometri.)

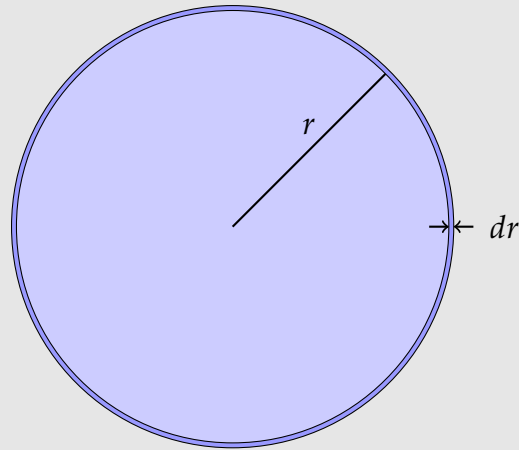
**Omkretsen** som funktion av **radien**  $r$  istället för diametern  $d$  :

$$O(r) = 2\pi r$$

Talet  $\pi$  förekommer även i formeln för **arean**  $A$  hos en cirkelskiva med radien  $r$  :

$$A(r) = \pi r^2$$

Notera att omkretsen  $O(r) = 2\pi r$  är **derivatan** av arean  $A(r) = \pi r^2$ :



$$dA = A(r + dr) - A(r) = O(r) dr \quad \Longrightarrow \quad A'(r) = \frac{dA}{dr} = O(r)$$

Motsvarande formler i tre dimensioner innehåller också talet  $\pi$ .

**Volymen** av ett **klot** med radien  $r$ :

$$V(r) = \int_{-r}^r \pi(r^2 - x^2) dx = \pi \left[ r^2x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^r = \frac{4\pi r^3}{3} \quad (\text{enl. skivformeln})$$

**Arean** av en **sfär** med radien  $r$ :

$$S(r) = V'(r) = 4\pi r^2$$

- **Egypten** (Rhindpapyrusen c:a 1550 f.Kr.):

$$A \approx \left(\frac{8}{9}d\right)^2 \quad (\text{dvs. } \pi \approx \left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3,16049\dots)$$

Wikipedia: [Rhind Mathematical Papyrus, Alexander Henry Rhind](#)

- **Arkimedes** (200-talet f.Kr.):

$$\underbrace{3 + \frac{10}{71}}_{=3,140845\dots} < \pi < \underbrace{3 + \frac{1}{7}}_{=22/7=3,142857\dots}$$

(Via omkrets av in- och omskriven regelbunden 96-hörning; se s. 22.)

- Ganska dåliga approximationer som  $\sqrt{10} = 3,162\dots$  och  $3 + \frac{1}{8} = 3,125$  (eller t.o.m. bara 3) har använts på många platser och vid många tidpunkter.

## Notation

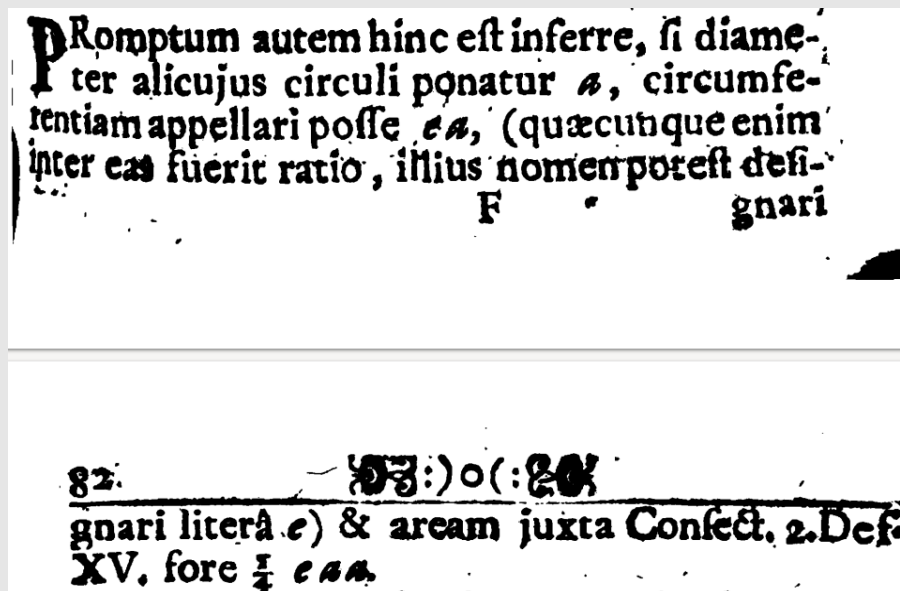
- Notationen med den grekiska bokstaven  $\pi$  kommer **inte** från antikens greker.
- **William Oughtred** 1647: *Clavis Mathematicae*, kap. 18

$$\frac{\pi}{\delta} = \frac{\text{periferi}}{\text{diameter}} \quad \left( \approx \frac{22}{7} \text{ eller } \frac{355}{113} \right)$$

16. Si in circulo fit  $7,22::\delta.\pi::113,355$ : erit  $\delta.\pi::$   
 $2R.P: \&$   
 $\delta.\pi::Rq. \text{ Circul.}$  Et  $\pi. \delta::\frac{1}{4}Pq. \text{ Circul.}$   
 $\delta.\pi::2Rc. \text{ Cylind.}$  Et  $\pi q. \delta q::\frac{1}{4}Pc. \text{ Cylind.}$   
 $\delta.\pi::\frac{4}{3}Rc. \text{ Sphær.}$  Et  $\pi q. \delta q::\frac{1}{8}Pc. \text{ Sphær.}$   
 $\delta.\pi::\frac{1}{3}Rc. \text{ Con.}$  Et  $\pi q. \delta q::\frac{1}{7}, Pc. \text{ Con.}$

- Johann Christoph Sturm 1689: *Mathesis Enucleata*, s. 81–82

$$e = 3,14\dots$$



Troligen första gången en ensam bokstav användes för förhållandet mellan omkrets och diameter.



- William Jones 1706: *Synopsis Palmariorum Matheseos*, s. 263

$$\pi = 3,14\dots$$

There are various other ways of finding the *Lengths*, or *Areas* of particular *Curve Lines*, or *Planes*, which may very much facilitate the Practice; as for Instance, in the *Circle*, the Diameter is to Circumference as 1 to

$$\frac{16}{5} - \frac{4}{239} - \frac{1}{3} \frac{16}{5^3} - \frac{4}{239^3} + \frac{1}{5} \frac{16}{5^5} - \frac{4}{239^5} - , \text{ \&c.} =$$

3.14159, &c. =  $\pi$ . This *Series* (among others for the same purpose, and drawn from the same Principle) I receiv'd from the Excellent Analyst, and my much Esteem'd Friend Mr. *John Machin*; and by means thereof, *Van Ceulen's* Number, or that in Art. 64.38. may be Examin'd with all desirable Ease and Dispatch.

Första gången bokstaven  $\pi$  användes ensamt för förhållandet.  
(Jones använde dock även  $\pi$  i andra betydelser i samma bok.)

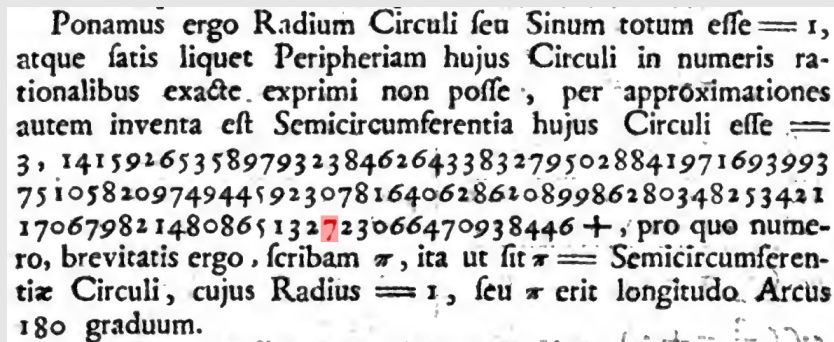
- **Leonhard Euler 1748:**

*Introductio in analysin infinitorum*, vol. 1, kap. 8

Berömd lärobok. Etablerade  $\pi = 3,14\dots$  som standard.

I vissa andra skrifter använde dock Euler andra bokstäver (t.ex.  $c$  eller  $p$ ) istället för  $\pi$ , eller använde  $\pi$  för andra vinklar än  $180^\circ$ , t.ex.  $90^\circ$  eller  $360^\circ$ .

**3Blue1Brown** (Grant Sanderson) på YouTube: [How pi was almost 6.283185...](#)



Ponamus ergo Radium Circuli seu Sinum totum esse  $= 1$ ,  
atque satis liquet Peripheriam hujus Circuli in numeris ra-  
tionalibus exacte exprimi non posse, per approximationes  
autem inventa est Semicircumferentia hujus Circuli esse  $=$   
3, 1415926535897932384626433832795028841971693993  
751058209749445923078164062862089986280348253421  
170679821480865132723066470938446 +, pro quo nume-  
ro, brevitatis ergo, scribam  $\pi$ , ita ut sit  $\pi =$  Semicircumferen-  
tiæ Circuli, cujus Radius  $= 1$ , seu  $\pi$  erit longitudo Arcus  
180 graduum.

Notera att han definierar  $\pi$  som båglängden hos en **halvcirkel** med radie 1, inte som förhållandet mellan cirkelns omkrets och diameter.

Ger 127 decimaler (med ett tryckfel: rödmarkerad sju ska vara en åtta).

## Pi eller tau?

- **Radien** betraktas numera som viktigare än **diametern**.  
(I **enhetscirkeln** är det ju **radien** som är 1, inte diametern.)

$$O = \pi \cdot d = \pi \cdot 2r = 2\pi \cdot r$$

Så konstanten  $2\pi$  är kanske mer fundamental än  $\pi$ ?

- Somliga förespråkar att denna konstant ska kallas **tau**:

$$\tau = 2\pi = 6,283185\dots$$

(Och att man ska fira  $\tau$ -dagen 28 juni istället för  $\pi$ -dagen 14 mars.)

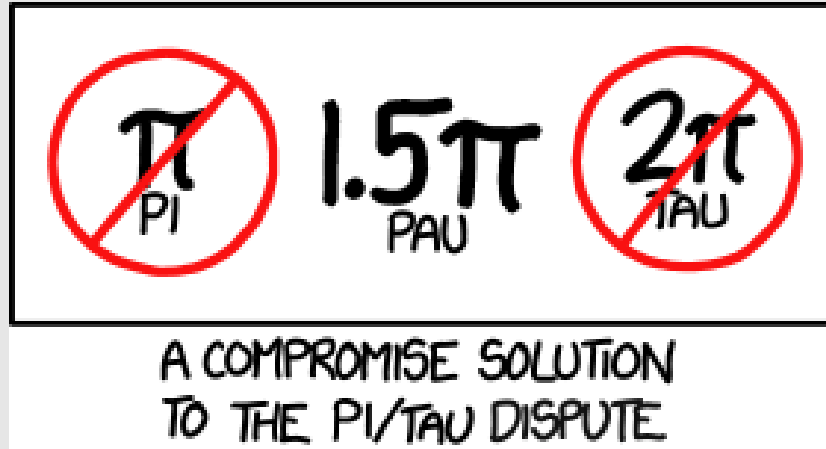
- Sinus och cosinus är  $\tau$ -periodiska funktioner.
- Uttrycket för cirkelns area blir  $A = \frac{1}{2}\tau r^2$ .

(Jfr många andra kvadratiska uttryck där det är naturligt med en faktor  $\frac{1}{2}$ , t.ex.  $\frac{1}{2}gt^2$  eller  $\frac{1}{2}mv^2$ .)

[π is wrong!](#) av Bob Palais (där ett "trebent pi" föreslås som symbol för  $2\pi$ )

[The Tau Manifesto](#) av Michael Hartl

```
$ python
Python 3.7.2 (default, Jan 10 2019, 23:51:51)
[GCC 8.2.1 20181127] on linux
Type "help", "copyright", "credits" or "license" for more information.
>>> import math
>>> math.tau
6.283185307179586
```



[xkcd.com/1292](http://xkcd.com/1292)

## Några andra möjliga sätt att definiera $\pi$

### Via bestämd integral

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \quad (\text{arean av en kvartscirkel})$$

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\text{båglängden av en kvartscirkel})$$

### Via potensserie

Talet  $\frac{\pi}{2}$  är det minsta positiva nollstället till funktionen

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (x \in \mathbf{R})$$

# Rationella och irrationella tal

- **Rationella** tal är sådana som skrivs som  $a/b$  där  $a$  och  $b$  är heltal ( $b \neq 0$ ).

Reella tal som inte är rationella kallas **irrationella**.

- Om  $n \in \mathbf{N}$  är en kvadrat, dvs.  $n = m^2$  för något  $m \in \mathbf{N}$ , så är dess kvadratrots  $\sqrt{n} = m$  ett heltal, och därmed ett rationellt tal.

Men alla övriga  $\sqrt{n}$  är irrationella tal:

$$\cancel{\sqrt{1}} \quad \sqrt{2} \quad \sqrt{3} \quad \cancel{\sqrt{4}} \quad \sqrt{5} \quad \sqrt{6} \quad \sqrt{7} \quad \sqrt{8} \quad \cancel{\sqrt{9}} \quad \sqrt{10} \quad \sqrt{11} \quad \dots$$

Bevis: Om  $\sqrt{n} = a/b$  så är

$$a^2 = nb^2$$

vilket pga. primfaktoriserings entydighet tvingar  $n$  att vara en kvadrat. (Varje primfaktor i  $n$  måste ju förekomma ett jämnt antal gånger om likheten ska kunna vara sann.)



## Talen $e$ och $\pi$ är irrationella

- **Euler** visade 1737 att talet  $e = 2,7182818284590\dots$  är irrationellt.

Wikipedia: [Proof that  \$e\$  is irrational](#)

- **Johann Heinrich Lambert** visade 1766 att talet  $\pi$  är irrationellt.

Mathologer (Burkard Polster) på YouTube: [Pi is IRRATIONAL: animation of a gorgeous proof](#)

- Enklare bevis av **Charles Hermite** 1873.

Mathologer: [Pi is IRRATIONAL: simplest proof on toughest test](#)

Wikipedia: [Proof that  \$\pi\$  is irrational](#)

## Algebraiska och transcendent tal

- Nollställen (även komplexa) till polynom  $p(x)$  med heltalskoefficienter kallas för **algebraiska** tal.

Icke-algebraiska komplexa tal kallas för **transcendent** tal.

- Alla rationella tal är algebraiska, eftersom  $a/b$  är nollställe till  $p(x) = bx - a$ . Alla reella transcendent tal är alltså irrationella.
- Men även många irrationella tal är algebraiska, t.ex.  $\sqrt{2}$ , som ju är nollställe till  $p(x) = x^2 - 2$ .
- Att vara transcendent är alltså en strikt starkare egenskap hos ett reellt tal än att vara irrationellt, och är i allmänhet mycket svårare att visa.

## Talen $e$ och $\pi$ är transcendent

- **Hermite** visade 1873 att  $e$  är transcendent.
- **Ferdinand Lindemann** visade 1882 på liknande sätt att  $\pi$  är transcendent.
- Förenklade bevis (för både  $e$  och  $\pi$ ) av **David Hilbert** 1893.

Mathologer: [The PROOF: e and pi are transcendental](#)

Följdsats av att  $\pi$  är transcendent:

**Cirkelns kvadratur är omöjlig.**

(Dvs. det är omöjligt att med passare och linjal konstruera en kvadrat med samma area som en given cirkel.)

**Wikipedia:** [Squaring the circle](#), [Indiana Pi Bill](#)

One of the unnoticed good effects of television is that people now watch it instead of producing pamphlets squaring the circle.

Underwood Dudley, *Mathematical Cranks* (1992), s. 303

- Det är också känt att t.ex.

$$e^\pi \quad \text{och} \quad \pi + \ln 2 + \sqrt{2} \ln 3$$

är transcendent tal.

- Man man har inte lyckats visa att t.ex. följande tal är det:

$$\pi + e, \quad \pi e, \quad \frac{\pi}{e}, \quad \pi^e, \quad \ln \pi, \quad \dots$$

- Dock vet man att **minst ett** av talen  $\pi + e$  och  $\pi e$  måste vara transcendent!

Bevis: Det finns en sats som säger att för ett polynom med algebraiska koefficienter så är samtliga nollställen algebraiska också. Så om  $a$  och  $b$  är transcendent kan inte både  $a + b$  och  $ab$  vara algebraiska, för då skulle

$$p(x) = (x - a)(x - b) = x^2 - (a + b)x + ab$$

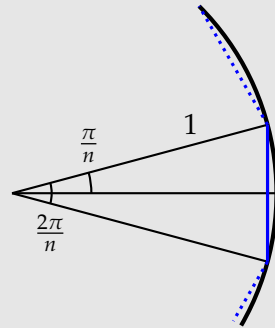
ha algebraiska koefficienter men transcendent nollställen, vilket är omöjligt enligt den satsen.

## Beräkning av approximationer till $\pi$

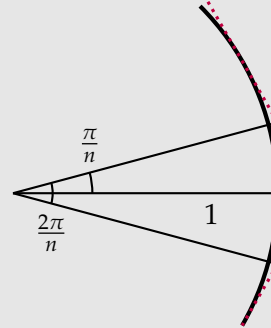
- Uppskattning med in- och omskrivna polygoner var under lång tid den enda metod man kände till.
- **Arkimedes** (Syrakusa, 200-talet f.Kr.) använde 96-hörningar.

Originalmanuskriptet finns inte kvar, men texten har bevarats via avskrifter i flera led. En engelsk översättning återfinns i boken **Pi: A Source Book** av Lennart Berggren, Jonathan Borwein & Peter Borwein (Springer 1997).

För  $n \geq 3$ , betrakta regelbundna  $n$ -hörningar in- resp. omskrivna i enhetscirkeln:



$$\text{Sidlängd } s = 2 \sin \frac{\pi}{n}$$



$$\text{Sidlängd } s = 2 \tan \frac{\pi}{n}$$

Med  $Q_n$  resp.  $P_n$  som deras halva omkrets (alltså  $\frac{1}{2}ns$ ) gäller:

$$Q_n = n \sin \frac{\pi}{n} < \pi < P_n = n \tan \frac{\pi}{n}$$

För att beräkna  $Q_{96}$  och  $P_{96}$  behöver vi alltså  $\sin \frac{\pi}{96}$  och  $\tan \frac{\pi}{96}$ .

Från  $\cos(2v) = 2 \cos^2 v - 1$  fås (för vinklar i första kvadranten)

$$\cos v = \sqrt{\frac{1 + \cos(2v)}{2}}$$

med vilket vi successivt från  $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$  kan beräkna

$$\cos \frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{24} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{48} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{96} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}}{2}$$



Trigonometriska ettan ger sedan  $\sin \frac{\pi}{96}$ , och då vet vi även  $\tan \frac{\pi}{96}$ .

Resultat:

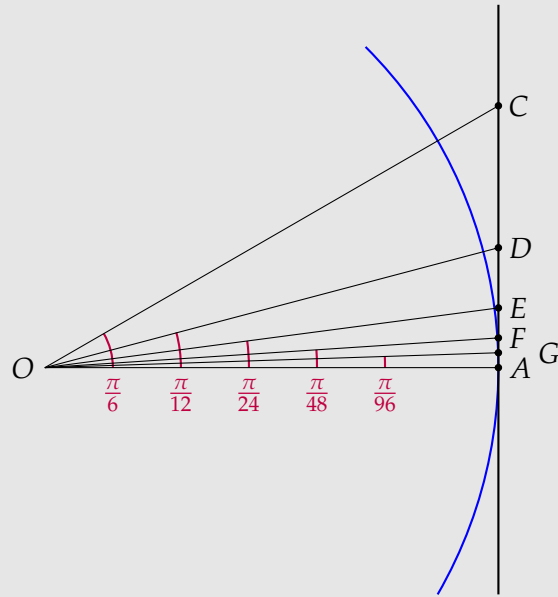
$$Q_{96} < \pi < P_{96}$$

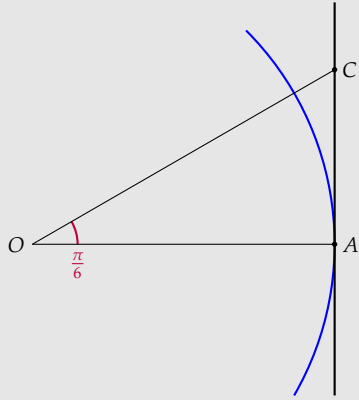
där

$$Q_{96} = 96 \sin \frac{\pi}{96} = 96 \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}}{2} = 3,14103195\dots$$

$$P_{96} = 96 \tan \frac{\pi}{96} = 96 \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}} = 3,14271459\dots$$

Arkimedes formulerar sig dock inte på detta sätt, utan använder elementär geometri för att successivt ge *rationella* uppskattningar av sträckorna  $AC$ ,  $AD$ ,  $AE$ ,  $AF$  och  $AG$  i förhållande till radien  $OA$  i figuren nedan, alltså det som vi kallar (co)tangens för vinklarna  $\frac{\pi}{6}$ ,  $\frac{\pi}{12}$ ,  $\frac{\pi}{24}$ ,  $\frac{\pi}{48}$  resp.  $\frac{\pi}{96}$ .





Vi har  $\frac{AC}{OC} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$  och  $\frac{AC}{OA} = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

Arkimedes gör följande rationella uppskattning:

$$\frac{OA}{AC} = \cot \frac{\pi}{6} = \sqrt{3} > \frac{265}{153}$$

Han förklarar inte varifrån han får  $\frac{265}{153}$ , men det är lätt att via kvadrering verifiera att olikheten är korrekt:

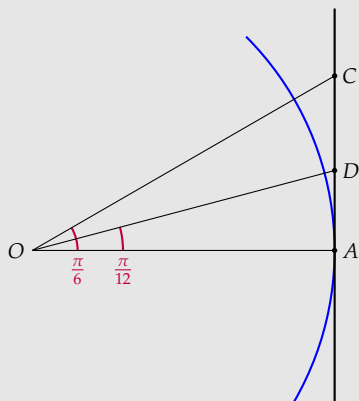
$$\left(\frac{265}{153}\right)^2 = \frac{265^2}{153^2} = \frac{70225}{23409}$$

är ju mindre än

$$(\sqrt{3})^2 = 3 = \frac{3 \cdot 23409}{23409} = \frac{70227}{23409}$$

**History of Science and Mathematics Stack Exchange:**

What is so mysterious about Archimedes' approximation of  $\sqrt{3}$ ?



Detta ger en rationell uppskattning av  $AD$  i förhållande till radien  $OA$ :

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AD+DC}{AD} = 1 + \frac{CD}{AD} = [\text{bisektrissatsen}] = 1 + \frac{OC}{OA} = \frac{OA+OC}{OA}$$

$$\implies \frac{OA}{AD} = \frac{OA+OC}{AC} = \frac{OA}{AC} + \frac{OC}{AC} > \frac{265}{153} + 2 = \frac{571}{153}$$

I nästa steg (uppskattning av  $AE$ ) behöver han  $OD/AD$ , som han uppskattar såhär:

$$\left(\frac{OD}{AD}\right)^2 = \frac{OA^2+AD^2}{AD^2} = \left(\frac{OA}{AD}\right)^2 + 1 > \left(\frac{571}{153}\right)^2 + 1 = \frac{349450}{153^2}$$

$$\implies \frac{OD}{AD} > \sqrt{\frac{349450}{153^2}} > \frac{591+\frac{1}{8}}{153}$$

(Ingen förklaring av varifrån han får  $591 + \frac{1}{8}$ .)

Efter några dylika steg når han det första resultatet:

$$\frac{\text{cirkelns omkrets}}{\text{diametern}} < \frac{\text{omkrets av omskriven 96-hörning}}{\text{diametern}} < \frac{14688}{4673 + \frac{1}{2}} < 3 + \frac{1}{7}$$

Och på liknande sätt visar han det andra resultatet:

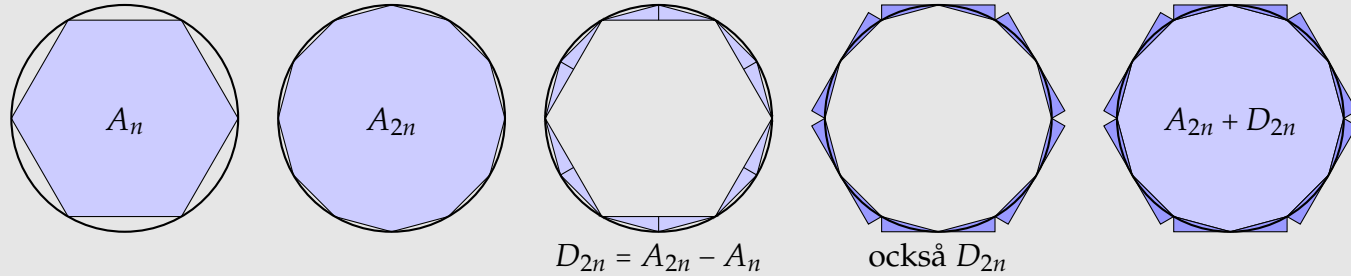
$$\frac{\text{cirkelns omkrets}}{\text{diametern}} > \frac{\text{omkrets av inskriven 96-hörning}}{\text{diametern}} > \frac{6336}{2017 + \frac{1}{4}} > 3 + \frac{10}{71}$$

Arkimedes lyckas alltså på detta sätt finna en instängning av de irrationella värdena  $Q_{96}$  och  $P_{96}$  (och därmed en instängning av  $\pi$ ) med ganska enkla rationella tal:

$$\underbrace{3 + \frac{10}{71}}_{=3,140845\dots} < \underbrace{Q_{96}}_{=3,14103195\dots} < \pi < \underbrace{P_{96}}_{=3,14271459\dots} < \underbrace{3 + \frac{1}{7}}_{=3,142857\dots}$$

- 刘徽 **Liú Huī** (Kina, 200-talet):

Metod baserad på **arean** (istället för omkretsen) av regelbunden månghörning inskriven i cirkel:



$$A_{2n} < \pi r^2 < A_{2n} + D_{2n}$$

Beräknar rekursivt sidlängden (och därur arean) i  $3 \cdot 2^n$ -hörningar med Pythagoras' sats. Med  $r = 10$  får han  $A_{96} \approx 313 + \frac{584}{625}$  och  $A_{192} \approx 314 + \frac{64}{625}$  vilket ger skillnaden  $D_{192} \approx \frac{105}{625}$ . Resultat, således:

$$314 + \frac{64}{625} \lesssim 100\pi \lesssim 314 + \frac{169}{625}$$

(Slutsats:  $\pi \approx 3,14 = \frac{157}{50}$  är ett enkelt och praktiskt närmevärde.)

Han säger också utan tydlig motivering att ett bättre värde (jämförbart med det som fås från  $A_{3072}$ ) ges av att addera korrektionstermen  $\frac{36}{625}$  till  $A_{192}$ :

$$\pi \approx \frac{A_{192} + \frac{36}{625}}{100} \approx \frac{\left(314 + \frac{64}{625}\right) + \frac{36}{625}}{100} = \frac{314 + \frac{4}{25}}{100} = \frac{314 + 0,16}{100} = 3,1416$$

En tänkbar förklaring är att han har noterat empiriskt att  $D_{2n} \approx \frac{1}{4}D_n$ , så att

$$\begin{aligned} \pi r^2 &= A_{192} + D_{2 \cdot 192} + D_{4 \cdot 192} + D_{8 \cdot 192} + \dots \\ &\approx A_{192} + D_{192} \cdot \left(\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots\right) \\ &= A_{192} + D_{192} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} \quad (\text{geometrisk serie med kvoten } \frac{1}{4}) \\ &= A_{192} + D_{192} \cdot \frac{1}{3} \\ &\approx \left(314 + \frac{64}{625}\right) + \frac{105}{625} \cdot \frac{1}{3} \\ &= \left(314 + \frac{64}{625}\right) + \frac{35}{625} \\ &\approx \left(314 + \frac{64}{625}\right) + \frac{36}{625} \end{aligned}$$

- 祖冲之 **Zǔ Chōngzhī / Tsu Ch'ung-chih** (Kina, 400-talet):

$$3,1415926 < \pi < 3,1415927$$

Använde Liu Huis metod på area av 12288-hörning. Resultatet ej överträffat förrän c:a 1000 år senare.

$$\pi \approx \frac{22}{7} = 3,142857\dots \quad \text{约率 } yuē\ lǜ \quad (\text{"ungefärligt förhållande"})$$

$$\pi \approx \frac{355}{113} = 3,1415929203\dots \quad \text{密率 } mì\ lǜ \quad (\text{"nära förhållande"})$$

Närmevärdet  $\frac{355}{113}$  var inte känt av grekerna, indierna eller araberna. Återupptäckt i Europa först 1585 av Adriaan Anthonisz.



## En liten utveckling om kedjebråk

Varje tal  $x \in \mathbf{R}$  är summan av sin **heltalsdel** och sin **bråkdel**:

$$x = [x] + \{x\} = a_0 + b_0, \quad a_0 \in \mathbf{Z}, \quad 0 \leq b_0 < 1.$$

Om  $b_0 \neq 0$  så är  $\frac{1}{b_0} > 1$ , med heltalsdel  $a_1 \geq 1$  och bråkdel  $b_1$ :

$$x = a_0 + b_0 = a_0 + \frac{1}{\frac{1}{b_0}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + b_1}, \quad 0 \leq b_1 < 1.$$

Om  $b_1 \neq 0$  så är  $\frac{1}{b_1} > 1$ , med heltalsdel  $a_2 \geq 1$  och bråkdel  $b_2$ :

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\frac{1}{b_1}}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + b_2}}, \quad 0 \leq b_2 < 1.$$

Och så vidare!

Detta ger en entydig **kedjebråksutveckling** av det reella talet  $x$ .

Processen slutar efter ändligt många steg (dvs. något  $b_k$  blir noll) om och endast om  $x$  är ett rationellt tal.

Om  $x$  är irrationellt fås en oändlig kedjebråksutveckling (vars successiva trunkeringar bildar en rationell talföljd med gränsvärdet  $x$ ):

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \dots}}}}$$

Notation:

$$x = [a_0; a_1, a_2, a_3, a_4, \dots]$$

Vissa kända matematiska konstanter har en regelbunden kedjebråksutveckling:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = [1; 1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots] = 1 + \frac{1}{\varphi} \quad (\text{gyllene snittet})$$

$$\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, 2, 2, 2, \dots]$$

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, 1, \dots]$$

Men kedjebråksutvecklingen för  $\pi$  följer inget uppenbart mönster:

$$\begin{aligned} \pi = [ & 3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, \\ & 1, 84, 2, 1, 1, 15, 3, 13, 1, 4, 2, 6, 6, 99, 1, 2, 2, 6, 3, \\ & 5, 1, 1, 6, 8, 1, 7, 1, 2, 3, 7, 1, 2, 1, 1, 12, 1, 1, 1, 3, 1, \\ & 1, 8, 1, 1, 2, 1, 6, 1, 1, 5, 2, 2, 3, 1, 2, 4, 4, 16, 1, 161, \dots ] \end{aligned}$$

Trunkeringar av kedjebåksutvecklingen ger bra rationella approximationer. T.ex. för  $\pi = 3,14159265358979\dots$  fås

$$[3;7] = 3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7} = 3,14\color{red}{2857\dots} > \pi$$

$$[3;7,15] = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15}} = \frac{333}{106} = 3,1415\color{red}{0943\dots} < \pi$$

$$[3;7,15,1] = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1}}} = \frac{355}{113} = 3,141592\color{red}{9203\dots} > \pi$$

$$[3;7,15,1,292] = \dots = \frac{103993}{33102} = 3,141592653\color{red}{0119\dots} < \pi$$

Det relativt stora talet 292 i  $\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, \dots]$  är orsaken till att trunkeringen

$$[3; 7, 15, 1] = \frac{355}{113}$$

ger en anmärkningsvärt bra approximation till  $\pi$  i förhållande till nämnarens storlek (sex korrekta decimaler med tresiffrig nämnare).

Bra "valuta för pengarna", med andra ord!

(Och lätt att minnas: 11 33 55  $\rightarrow$  113 355  $\rightarrow$   $\frac{355}{113}$ .)

Arkimedes' uppskattning  $\sqrt{3} > \frac{265}{153}$  kan fås ur kedjebråket  $\sqrt{3} = [1; 1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots]$ :

$$1 = [1] < \sqrt{3}$$

$$2 = [1; 1] > \sqrt{3}$$

$$\frac{5}{3} = [1; 1, 2] < \sqrt{3}$$

$$\frac{7}{4} = [1; 1, 2, 1] > \sqrt{3}$$

$$\frac{19}{11} = [1; 1, 2, 1, 2] < \sqrt{3}$$

$$\frac{26}{15} = [1; 1, 2, 1, 2, 1] > \sqrt{3}$$

$$\frac{71}{41} = [1; 1, 2, 1, 2, 1, 2] < \sqrt{3}$$

$$\frac{97}{56} = [1; 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1] > \sqrt{3}$$

$$\rightarrow \frac{265}{153} = [1; 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2] < \sqrt{3}$$

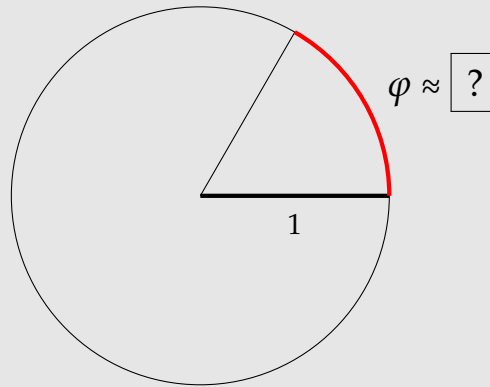
$$\frac{362}{209} = [1; 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1] > \sqrt{3}$$

⋮

[Slut på utvecklingen. Åter till  $\pi$ -approximerandet!]

- **Ludolph van Ceulen** (Tyskland & Nederländerna, 1540–1610)  
Använde Arkimedes' metoder.  
Publicerade 20 decimaler 1596 (via  $60 \cdot 2^{33}$ -hörning).  
Hann sedan till 35 decimaler (via  $2^{62}$ -hörning) innan han dog.  
På tyska kallas  $\pi$  ibland **die Ludolphsche Zahl**.

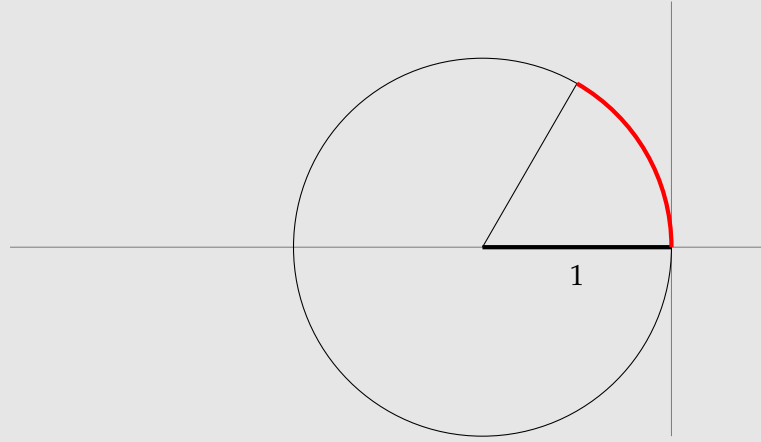
- **Willebrord Snell** (Nederländerna, 1580–1626)

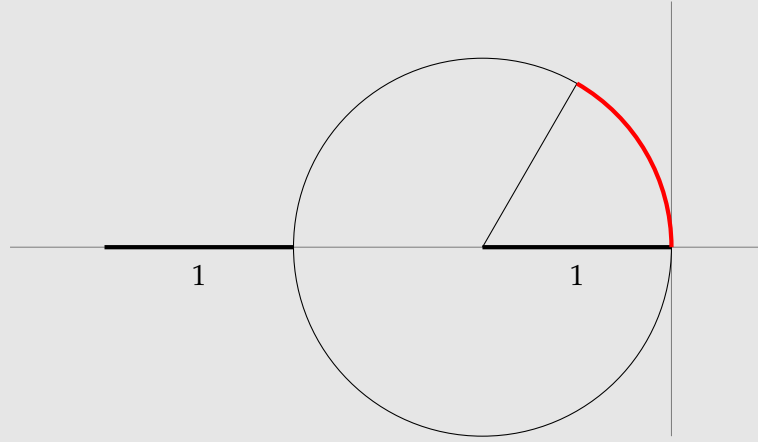


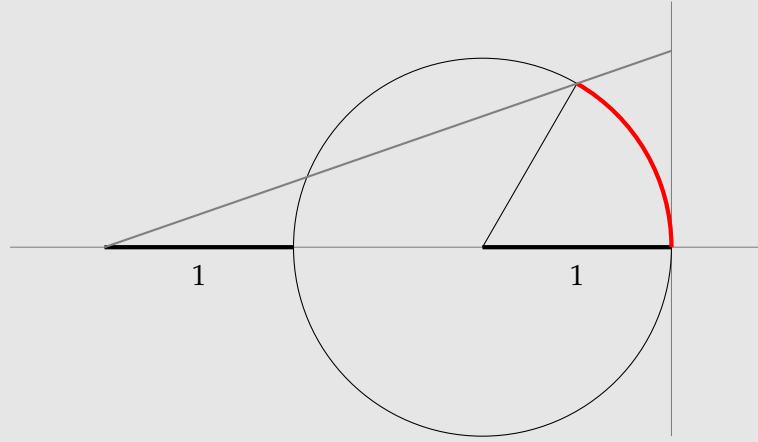
Ny geometrisk under-/överskattning av båglängd 1621 (dock utan rigoröst bevis). Bevisat av Christiaan Huygens 1654.

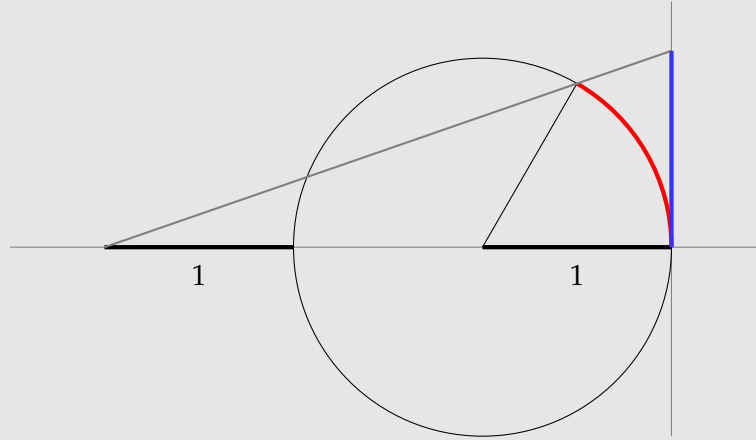
Effektivare än in-/omskrivna polygoner.



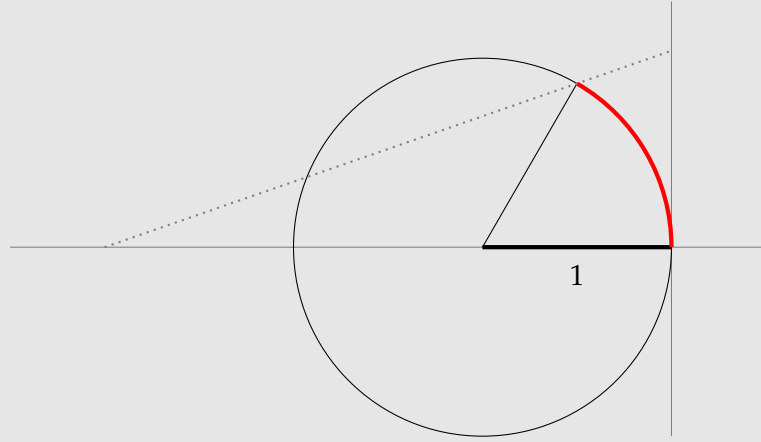


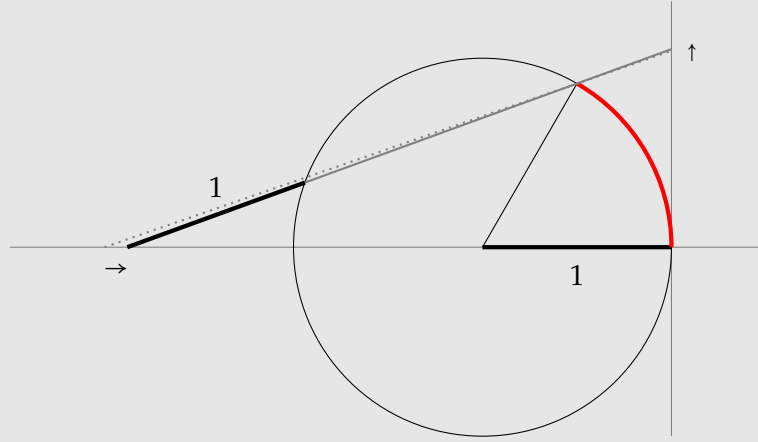


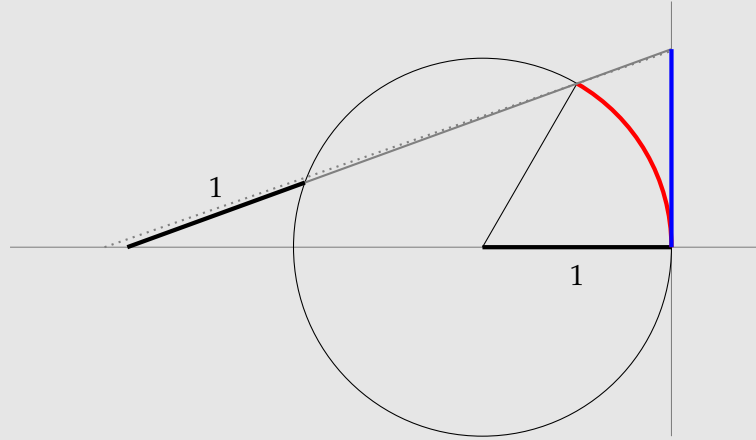




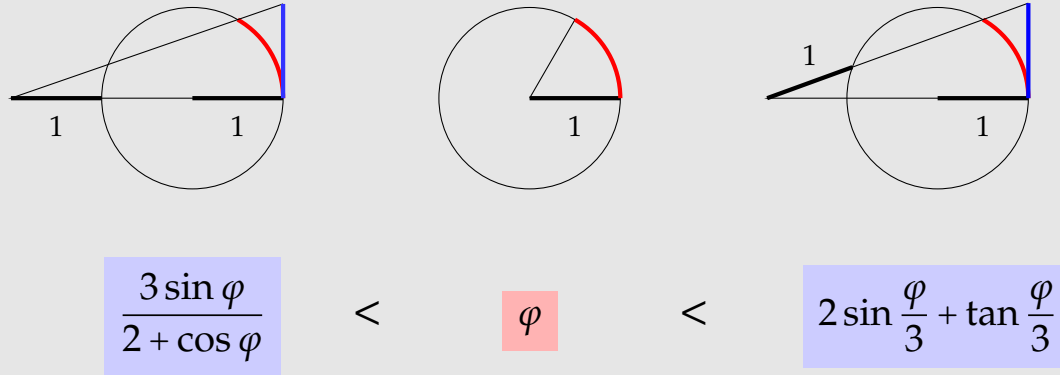
Den blåmarkerade sträckan är **kortare** än bågen, enligt Snell.







Och denna blåmarkerade sträcka är **längre** än bågen.



Redan  $\varphi = \pi/6$  ger ungefär lika bra resultat som Arkimedes' in- och omskrivna 96-hörningar:

$$6 \cdot \frac{3 \cdot \frac{1}{2}}{2 + \frac{\sqrt{3}}{2}} = 3,140237... < \pi < 6 \cdot \left( 2 \sin \frac{\pi}{18} + \tan \frac{\pi}{18} \right) = 3,141740...$$

Snell verifierade van Ceulens resultat genom att beräkna 34 decimaler med en  $2^{30}$ -hörning.



- Ett dramatiskt genombrott:

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

(Mādhava c:a 1400, James Gregory 1668, G. W. Leibniz 1671)

Bevis: För  $-1 < x < 1$  har vi

$$\begin{aligned} \arctan x &= \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} \\ &= \int_0^x (1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots) dt \quad (\text{geom. serie med kvoten } -t^2) \\ &= \left[ t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 + \dots \right]_0^x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \dots \end{aligned}$$

(Potensserier kan **integreras termvis** i det inre av konvergensintervallet.)

Att likheten även gäller i intervallets ändpunkter  $x = \pm 1$  följer av **Leibniz' kriterium** och **Abels kontinuitetssats**.

- Insättning av  $x = 1$  i den ovanstående formeln

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

ger

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

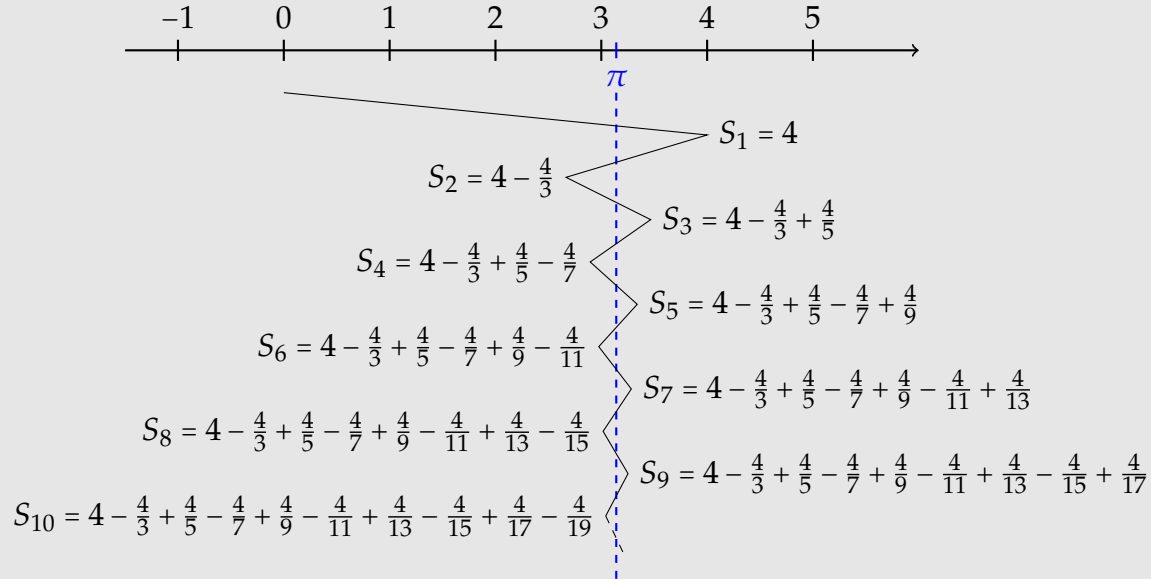
Berömt resultat!

**3Blue1Brown:** [Pi hiding in prime regularities](#)

Invecklat men intressant direkt bevis för  $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$ , inte via arctan-serien, utan genom att räkna heltalspunkter i cirklar med radie  $R \rightarrow \infty$ .

Dock mycket långsam konvergens, dvs. många termer behövs för att få en bra approximation av  $\pi$ .

$$\pi = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \frac{4}{13} - \frac{4}{15} + \frac{4}{17} - \frac{4}{19} + \frac{4}{21} - \frac{4}{23} + \dots$$



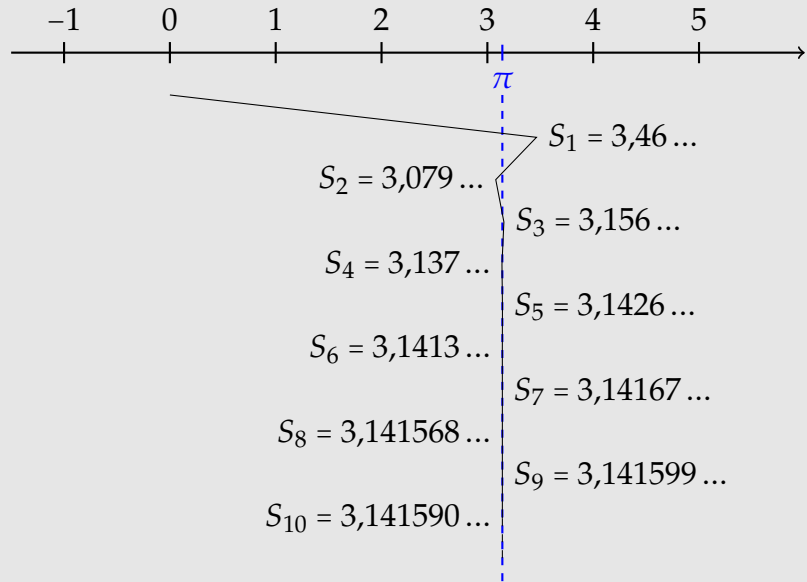
- **Abraham Sharp** (1699): 72 decimaler med

$$\frac{\pi}{6} = \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^{2k+1}$$

Med  $x = 1/\sqrt{3}$  istället för  $x = 1$  fås mycket snabbare konvergens, eftersom faktorn  $x^k$  går mot noll fort när  $-1 < x < 1$ .

(Ju närmare noll  $x$  ligger desto snabbare konvergerar serien.)

$$\pi = \frac{6}{1 \cdot 3^{1/2}} - \frac{6}{3 \cdot 3^{5/2}} + \frac{6}{5 \cdot 3^{5/2}} - \frac{6}{7 \cdot 3^{7/2}} + \dots$$



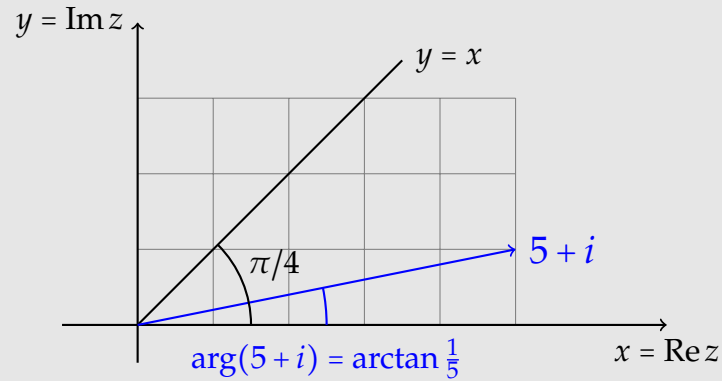
- **John Machin** (1706): 100 decimaler med

$$\begin{aligned}
 \frac{\pi}{4} &= 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \left( \frac{4}{5^{2k+1}} - \frac{1}{239^{2k+1}} \right) \\
 &= \left( \frac{16}{5} - \frac{4}{239} \right) - \frac{1}{3} \left( \frac{16}{5^3} - \frac{4}{239^3} \right) + \frac{1}{5} \left( \frac{16}{5^5} - \frac{4}{239^5} \right) - \frac{1}{7} \left( \frac{16}{5^7} - \frac{4}{239^7} \right) + \dots
 \end{aligned}$$

Uttrycket  $\frac{4}{5^{2k+1}}$  är bra vid handräkning, och går fort mot noll.

Uttrycket  $\frac{1}{239^{2k+1}}$  går ännu fortare mot noll.

Bevis för  $\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$  :



Vinkeln  $4 \arctan \frac{1}{5} = \arg((5+i)^4)$  är en aning större än  $\pi/4$ , eftersom talet

$$(5+i)^4 = \dots = 476 + 480i$$

ligger just ovanför linjen  $y = x$  i komplexa talplanet. Hur mycket större? Jo, den överskjutande vinkeln är precis  $\arctan \frac{1}{239}$ , eftersom

$$\frac{476 + 480i}{1 + i} = \dots = 2(239 + i).$$

Vi såg Machins formel redan i början av föreläsningen, i William Jones' bok från 1706 (som även ger Machins 100 decimaler på s. 243):

There are various other ways of finding the *Lengths*, or *Areas* of particular *Curve Lines*, or *Planes*, which may very much facilitate the Practice; as for Instance, in the *Circle*, the Diameter is to Circumference as 1 to

$$\frac{16}{5} - \frac{4}{239} - \frac{1}{3} \left( \frac{16}{5^3} - \frac{4}{239^3} \right) + \frac{1}{5} \left( \frac{16}{5^5} - \frac{4}{239^5} \right) - \dots$$

3.14159, &c. =  $\pi$ . This *Series* (among others for the same purpose, and drawn from the same Principle) I receiv'd from the Excellent Analyst, and my much Esteem'd Friend Mr. *John Machin*; and by means thereof, *Van Ceulen's* Number, or that in Art. 64.38. may be Examin'd with all desirable Ease and Dispatch.

$$\pi = \left( \frac{16}{5} - \frac{4}{239} \right) - \frac{1}{3} \left( \frac{16}{5^3} - \frac{4}{239^3} \right) + \frac{1}{5} \left( \frac{16}{5^5} - \frac{4}{239^5} \right) - \dots$$



- **William Shanks** (1812 – 1882) använde många år av sitt liv för att beräkna 707 decimaler (publ. 1873) med hjälp av Machins formel.

Tyvärr var "bara" de 527 första korrekta, men det upptäcktes inte förrän 1945 när man började ha räknemaskiner till hjälp.

- Ända in på 2000-talet har liknande formler använts vid världsrekordberäkningar av  $\pi$ .

T.ex.

$$\frac{\pi}{4} = 12 \arctan \frac{1}{49} + 32 \arctan \frac{1}{57} - 5 \arctan \frac{1}{239} + 12 \arctan \frac{1}{110443}$$

Bevis:  $\frac{(49+i)^{12}(57+i)^{32}(110443+i)^{12}}{(239+i)^5}$   
 $= 88860064547494737246970325740485777458555009877983508153167016563322988531581358984112739562988281250000000000000000000000000000(1+i)$   
 så summan måste vara  $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$  för något  $n \in \mathbf{Z}$ , och  $n = 0$  är det enda rimliga.

- **Eugene Salamin & Richard Brent (1975, på varsitt håll):**

$$\pi = \frac{2 \operatorname{agm}\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{\frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} 2^k c_k^2}$$

”agm” står för **aritmetisk-geometriskt medelvärde** av två positiva tal:

$$\operatorname{agm}(a, b) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

där

$$a_0 = a > 0$$

$$b_0 = b > 0$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \quad (\text{arit. medelv. av } a_n \text{ och } b_n)$$

$$b_{n+1} = (a_n b_n)^{1/2} \quad (\text{geom. medelv. av } a_n \text{ och } b_n)$$

$$c_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - b_n) \quad (\text{hjälpstorhet, ingår i formeln ovan})$$

- **Kvadratisk konvergens.** Antalet korrekta decimaler i

$$\pi \approx \frac{2a_n^2}{\frac{1}{2} - \sum_{k=1}^n 2^k c_k^2} \quad (\text{med } a_0 = 1 \text{ och } b_0 = 1/\sqrt{2})$$

fördubblas (ungefär) i varje iteration!

- Formeln var faktiskt känd av Gauss redan 1809, men hade fallit i glömska.  
Ej lämplig för handräkning. Alla uträkningar måste göras med full precision (det önskade slutliga antalet decimaler). Rotutdragningar.
- Förbättrad implementation av Arnold Schönhage 1994.  
(Undviker kostsamma multiplikationer.)
- Liknande algoritmer av Jonathan & Peter Borwein har konvergens av ännu högre ordning.

- **Världsrekordet** (från juni 2024) är 202 112 290 000 000 decimaler.

Metod (**David & Gregory Chudnovsky** 1988):

$$\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (6k)! (545140134k + 13591409)}{(3k)! (k!)^3 640320^{3k+3/2}}$$

Redan första termen (den med  $k = 0$ ) ensam ger

$$\pi \approx 3.1415926535897\mathbf{342}\dots$$

Sedan c:a 14 nya decimaler per term.

**Wikipedia:** [Chudnovsky brothers](#), [Chudnovsky algorithm](#)

[y-cruncher – A Multi-Threaded Pi-Program](#) (den mjukvara som använts)

[Even more pi in the sky: Calculating 100 trillion digits of pi on Google Cloud](#)

[StorageReview Calculated 100 Trillion Digits of Pi in 54 days, Besting Google Cloud](#)

[105 Trillion Pi Digits: The Journey to a New Pi Calculation Record](#)

[StorageReview Lab Breaks Pi Calculation World Record with Over 202 Trillion Digits](#)

- Det var **Ramanujan** som 1914 bevisade den första formeln av denna typ:

$$\frac{1}{\pi} = 162 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (6k)! (133k + 8)}{(3k)! (k!)^3 255^{3k+3/2}}$$

Detta är relaterat till teorin för **elliptiska kurvor** och **modulära funktioner**, vilket också hänger ihop med **Fermats stora sats**

$$a^n + b^n \neq c^n \text{ om } n \geq 3 \text{ och } a, b, c \text{ är positiva heltal}$$

(formulerad av Pierre de Fermat 1637, bevisad av Andrew Wiles 1995) och det faktum att **Ramanujans konstant**

$$e^{\pi\sqrt{163}} = 262537412640768743,99999999999925\dots$$

är mycket nära ett heltal.

- Rekorduträkningar kan kontrolleras med **BBP-formeln**

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k} \left( \frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6} \right)$$

med vars hjälp man kan beräkna en godtycklig siffra i  $\pi$ :s hexadecimal-utveckling (dvs. i basen 16) utan att beräkna alla föregående.

(David Bailey, Peter Borwein, Simon Plouffe 1995)

- Och även med den effektivare BBP-liknande formeln

$$\pi = \frac{1}{2^6} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1024^k} \left( -\frac{2^5}{4k+1} - \frac{1}{4k+3} + \frac{2^8}{10k+1} - \frac{2^6}{10k+3} - \frac{2^2}{10k+5} - \frac{2^2}{10k+7} + \frac{1}{10k+9} \right)$$

(Fabrice Bellard 1997)

## Basel-problemet

Fråga:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots = ???$$

(Pietro Mengoli 1650)

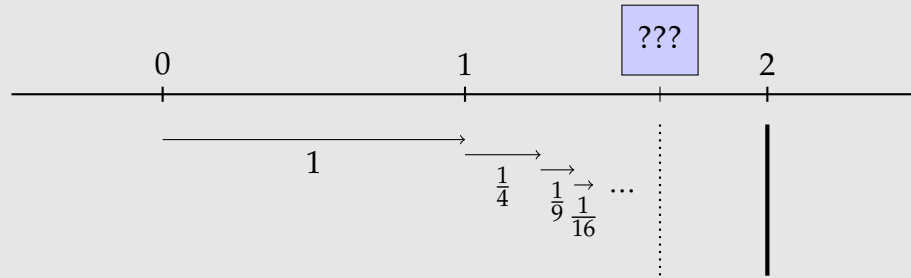
För varje  $N \geq 2$  gäller följande:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2} &= 1 + \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{N \cdot N} \\ &< 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(N-1) \cdot N} \\ &= 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \dots + \left(\frac{1}{N-1} - \frac{1}{N}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{N-1} - \frac{1}{N} \\ &= 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{N} \\ &< 2\end{aligned}$$

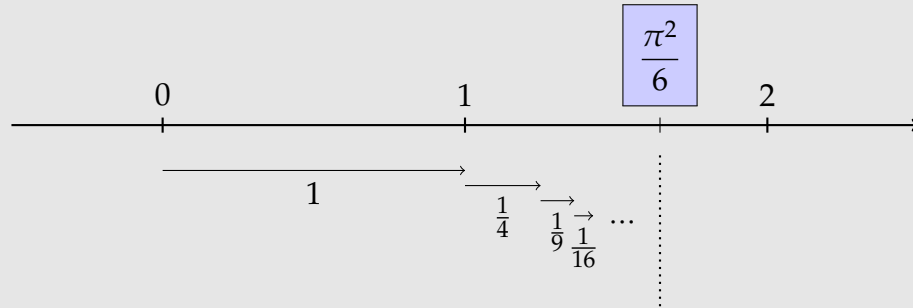


Delsummorna  $\sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2}$  kommer aldrig över 2 (enligt förra sidan).

Serien  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2}$  måste alltså ha ett **ändligt** värde (högst 2). Men **vilket**?



Svar (Euler 1734):  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$  (= 1,644934...)



**Mathematics Stack Exchange:**

Different methods to compute  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$  (Basel problem)

**3Blue1Brown:**

Why is pi here? And why is it squared? A geometric answer to the Basel problem

## Ett elementärt bevis för $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

- Grunken & instängningsregeln räcker!
  - Utgångspunkt:  $0 < \sin x < x < \tan x$  för  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ .
  - Detta medför att  $0 < \frac{1}{\tan^2 x} < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{\sin^2 x}$  för  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ .
- Och trig-ettan ger  $\frac{1}{\tan^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$ .

Alltså:  $\frac{1}{\sin^2 x} - 1 < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{\sin^2 x}$  för  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ .

- Fixera ett heltal  $n \geq 1$ , och dela intervallet  $]0, \frac{\pi}{2}[$  i  $2^n$  lika stora bitar. Kalla delningspunkterna för

$$x_k = k \cdot \left( \frac{\pi/2}{2^n} \right) \quad (k = 1, 2, 3, \dots, 2^n - 1)$$

- Olikheten  $\frac{1}{\sin^2 x} - 1 < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{\sin^2 x}$  (från förra sidan) gäller i varje delningspunkt, eftersom de alla ligger i intervallet  $]0, \frac{\pi}{2}[$ :

$$\frac{1}{\sin^2 x_k} - 1 < \frac{1}{x_k^2} < \frac{1}{\sin^2 x_k} \quad (k = 1, 2, 3, \dots, 2^n - 1)$$

- Summering av ovanstående  $2^n - 1$  stycken olikheter ger

$$\sum_{k=1}^{2^n-1} \left( \frac{1}{\sin^2 x_k} - 1 \right) < \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{x_k^2} < \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{\sin^2 x_k}$$

- Från förra sidan:

$$\sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{\sin^2 x_k} - \sum_{k=1}^{2^n-1} 1 < \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{x_k^2} < \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{\sin^2 x_k}$$

- Alltså, om den blåmarkerade summan döps till  $S_n$ :

$$S_n - (2^n - 1) < \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k^2 \left(\frac{\pi/2}{2^n}\right)^2} < S_n$$

- Multiplicera alla led med den positiva konstanten  $\left(\frac{\pi/2}{2^n}\right)^2$ :

$$\left(\frac{\pi/2}{2^n}\right)^2 (S_n - (2^n - 1)) < \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k^2} < \left(\frac{\pi/2}{2^n}\right)^2 S_n$$

- Vi ska nu beräkna  $S_n = \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{\sin^2 x_k}$ . Notera att

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin^2(\frac{\pi}{2} - x)} &= \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} \\ &= \frac{4}{(2 \sin x \cos x)^2} = \frac{4}{\sin^2 2x} \end{aligned}$$

Om man tar mittpunkten  $\frac{\pi}{4}$  för sig, och parar ihop  $x_k < \frac{\pi}{4}$  med  $x_{2^n-k} = \frac{\pi}{2} - x_k > \frac{\pi}{4}$ , får man alltså rekursionen

$$S_n = \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{\sin^2 x_k} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + 4S_{n-1} = 2 + 4S_{n-1}$$

- Begynnelsevillkor:  $S_0 = 0$ .

- Vi vill alltså lösa rekursionen

$$S_n = 2 + 4S_{n-1}$$

med begynnelsevillkoret  $S_0 = 0$ . För att göra detta undersöker vi hur mycket  $S_n$  avviker från jämviktslösningen  $S^*$  som ges av  $S^* = 2 + 4S^*$ , alltså  $S^* = -\frac{2}{3}$ .

- Betrakta alltså

$$T_n = S_n - S^* = S_n + \frac{2}{3}$$

$$\begin{cases} S_n = 2 + 4S_{n-1} \\ S_0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} T_n - \frac{2}{3} = 2 + 4(T_{n-1} - \frac{2}{3}) \\ T_0 - \frac{2}{3} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} T_n = 4T_{n-1} \\ T_0 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Denna enklare rekursion för  $T_n$  har uppenbart lösningen  $T_n = \frac{2}{3} \cdot 4^n$ , så lösningen för  $S_n = T_n - \frac{2}{3}$  blir alltså  $S_n = \frac{2}{3}(4^n - 1)$ .

- I vår tidigare olikhet

$$\left(\frac{\pi/2}{2^n}\right)^2 \left(S_n - (2^n - 1)\right) < \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k^2} < \left(\frac{\pi/2}{2^n}\right)^2 S_n$$

kan vi nu sätta in  $S_n = \frac{2}{3}(4^n - 1)$ , vilket ger följande:

$$\left(\frac{\pi/2}{2^n}\right)^2 \left(\frac{2}{3}(4^n - 1) - (2^n - 1)\right) < \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k^2} < \left(\frac{\pi/2}{2^n}\right)^2 \frac{2}{3}(4^n - 1)$$

$$\iff \boxed{\frac{\pi^2}{6} \left(1 - \frac{1}{4^n} - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{4^n}\right)\right) < \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k^2} < \frac{\pi^2}{6} \left(1 - \frac{1}{4^n}\right)}$$

- Båda ytterleden går här mot  $\frac{\pi^2}{6}$  då  $n \rightarrow \infty$ , och då måste även den instängda summan i mitten göra det. Klart!



## Gauss-integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \quad \left( \iff I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx = 1 \right)$$

- Gausskurvan  $y = e^{-x^2}$  beskriver **normalfördelningen** i sannolikhetslära.
- Man behöver veta dess integral för att kunna normera så att totala sannolikheten blir 1.
- Problem: Det går inte att uttrycka dess primitiva funktion  $\int e^{-x^2} dx$  med elementära funktioner (bevisat av Liouville på 1830-talet).

Följande uträkning med hjälp av **polära koordinater**

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

och deras **lokala areaskala**  $r$  är en klassiker i flervariabelanalyskurser:

$$\begin{aligned} I^2 &= I \cdot I = \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi y^2} dy \right) \\ &= \iint_{\mathbf{R}^2} e^{-\pi x^2} e^{-\pi y^2} dx dy = \iint_{\mathbf{R}^2} e^{-\pi(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \iint_{0 \leq r, 0 \leq \varphi < 2\pi} e^{-\pi r^2} r dr d\varphi \\ &= \left( \int_0^{2\pi} d\varphi \right) \left( \int_0^{\infty} r e^{-\pi r^2} dr \right) = 2\pi \cdot \left[ \frac{-1}{2\pi} e^{-\pi r^2} \right]_0^{\infty} = 1 \end{aligned}$$

Slutsats, eftersom  $I > 0$ :  $I = 1$ , vilket skulle visas.

## Ett enkelt bevis för att $\pi < 22/7$

$$\begin{aligned} 0 &< \int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} dx && \text{(positiv integrand } \Rightarrow \text{ positiv integral)} \\ &= [\text{multiplicera ut } x^4(1-x)^4 \text{ och polynomdividera sedan}] \\ &= \int_0^1 \left( x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4 - \frac{4}{1+x^2} \right) dx \\ &= \left[ \frac{x^7}{7} - \frac{4x^6}{6} + x^5 - \frac{4x^3}{3} + 4x - 4 \arctan x \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{7} - \frac{2}{3} + 1 - \frac{4}{3} + 4 - 4 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{22}{7} - \pi \end{aligned}$$

(D. P. Dalzell, 1944)

Ett par liknande olikheter:

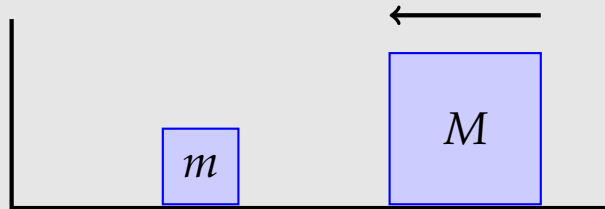
$$0 < \int_0^1 \frac{x^5(1-x)^6(197+462x^2)}{530(1+x^2)} dx = \dots = \pi - \frac{333}{106}$$

$$0 < \int_0^1 \frac{x^8(1-x)^8(25+816x^2)}{3164(1+x^2)} dx = \dots = \frac{355}{113} - \pi$$

(S. K. Lucas 2005, 2007)

# Ett mekanikproblem

(Gregory Galperin 1995, publicerat 2003)



Hur många kollisioner (inkl. med väggen)?

(Ingen friktion, elastiska stötar.)

Massförhållande $M/m$	Antal kollisioner
1	3
$10^2$	31
$10^4$	314
$10^6$	3141
$10^8$	31415
$10^{10}$	314159
$\vdots$	$\vdots$

**3Blue1Brown:**

The most unexpected answer to a counting puzzle

So why do colliding blocks compute pi?

How colliding blocks act like a beam of light ... to compute pi.

## Wallis' produkt

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdot \dots = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(k-1)(k+1)}$$

(John Wallis 1655)

- För att bevisa detta, betrakta  $I_n = \int_0^\pi \sin^n x dx$  för  $n \geq 0$ .
- Enkel uträkning ger integralens värde när  $n = 0$  och  $n = 1$ :

$$I_0 = \int_0^\pi 1 dx = \pi$$

$$I_1 = \int_0^\pi \sin x dx = [-\cos x]_0^\pi = 2$$



- **Partiell integration**  $\int f(x) g(x) dx = F(x) g(x) - \int F(x) g'(x) dx$   
ger, för  $n \geq 2$ :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^\pi \sin^n x dx = \int_0^\pi \sin x \cdot \sin^{n-1} x dx \\ &= \left[ (-\cos x) \cdot \sin^{n-1} x \right]_0^\pi - \int_0^\pi (-\cos x) \cdot (n-1) \sin^{n-2} x \cos x dx \\ &= 0 + (n-1) \int_0^\pi \sin^{n-2} x \cdot \cos^2 x dx \\ &= (n-1) \int_0^\pi \sin^{n-2} x \cdot (1 - \sin^2 x) dx \\ &= (n-1) \int_0^\pi (\sin^{n-2} x - \sin^n x) dx = (n-1) (I_{n-2} - I_n) \end{aligned}$$

Från detta samband kan vi lösa ut  $I_n$  och få en **rekursionsformel**:

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

- Denna rekursionsformel

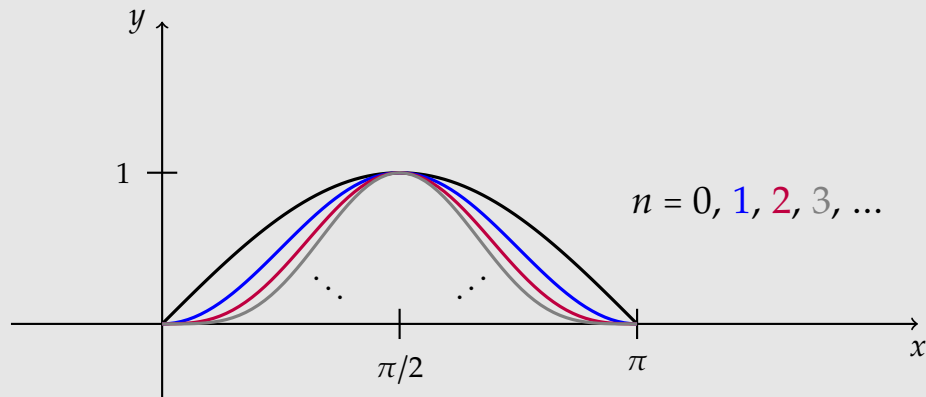
$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

ger nu successivt värdena på alla integralerna  $I_n$ , utgående från startvärdena  $I_0$  och  $I_1$ :

$$I_0 = \pi \Rightarrow I_2 = \frac{1}{2} \cdot \pi \Rightarrow I_4 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi \Rightarrow I_6 = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi \quad (\text{osv.})$$

$$I_1 = 2 \Rightarrow I_3 = \frac{2}{3} \cdot 2 \Rightarrow I_5 = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \Rightarrow I_7 = \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \quad (\text{osv.})$$

- För varje  $x$  i intervallet  $0 < x < \pi/2$  gäller  $0 < \sin x < 1$ , så  $\sin^n x$  blir mindre ju större  $n$  är.



Därmed blir även hela integralen  $I_n = \int_0^\pi \sin^n x dx$  (arean mellan kurvan och  $x$ -axeln) mindre ju större  $n$  är.

- Med andra ord, följden  $(I_n)_0^\infty$  är strängt **avtagande**:

$$I_0 > I_1 > I_2 > I_3 > I_4 > I_5 > I_6 > I_7 > \dots$$

Med värdena utskrivna:

$$\pi > 2 > \frac{1}{2} \cdot \pi > \frac{2}{3} \cdot 2 > \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi > \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 > \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi > \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 > \dots$$

- Från

$$\dots > I_{2n} > I_{2n+1} > I_{2n+2} > \dots$$

fås

$$\frac{(2n-1) \cdot (2n-3) \cdot \dots \cdot 1}{(2n) \cdot (2n-2) \cdot \dots \cdot 2} \cdot \pi > \frac{(2n) \cdot (2n-2) \cdot \dots \cdot 2}{(2n+1) \cdot (2n-1) \cdot \dots \cdot 3} \cdot 2$$

$$> \frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{(2n-1) \cdot (2n-3) \cdot \dots \cdot 1}{(2n) \cdot (2n-2) \cdot \dots \cdot 2} \cdot \pi$$

$$\iff \frac{\pi}{2} < \frac{((2n) \cdot (2n-2) \cdot \dots \cdot 2)^2}{(2n+1)((2n-1) \cdot (2n-3) \cdot \dots \cdot 3)^2 \cdot 1} < \frac{1 + \frac{1}{2n}}{1 + \frac{2}{2n}} \cdot \frac{\pi}{2}$$

- **Instängningsregeln** för gränsvärden ger att mittenledet går mot  $\pi/2$  då  $n \rightarrow \infty$  (eftersom ytterleden gör det), vilket precis är vad som skulle visas.

- Ett annat bevis:  
 3Blue1Brown: [The Wallis product for pi, proved geometrically](#)
- Låt  $p_n$  beteckna sannolikheten för **lika många krona som klave** vid  $2n$  slantsinglingar.

$$p_n = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} = \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-3) \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n-2) \cdot 2n}$$

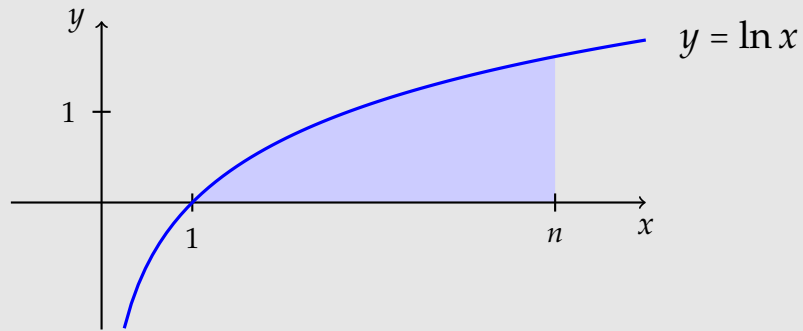
$$\frac{1}{p_n^2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n-1} \cdot 2n \approx \pi n$$

$\approx \pi/2$  när  $n$  är stort, enl. Wallis

$$\implies \boxed{p_n \approx \frac{1}{\sqrt{\pi n}}} \text{ när } n \text{ är stort}$$

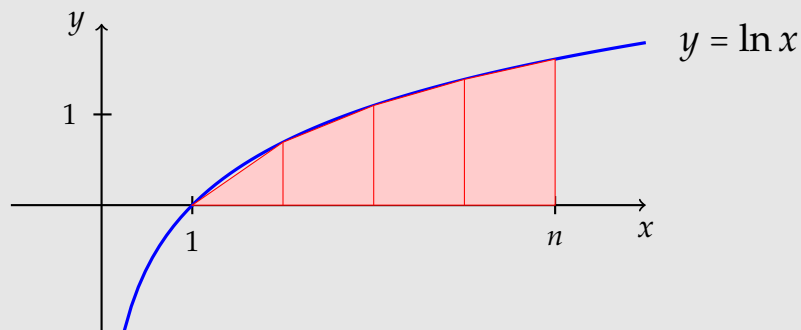
## Stirlings approximation av $n!$

Låt  $n \geq 2$  vara ett heltal. Nedanstående area kan beräknas exakt:



$$\int_1^n \ln x \, dx = \left[ x \ln x - x \right]_1^n = n \ln n - n + 1$$

Vi kan även approximera arean med **trapetsregeln** (med steglängd 1):



$$\frac{\ln 1 + \ln 2}{2} + \frac{\ln 2 + \ln 3}{2} + \frac{\ln 3 + \ln 4}{2} + \dots + \frac{\ln(n-1) + \ln n}{2}$$

$$= \ln 2 + \ln 3 + \ln 4 + \dots + \ln(n-1) + \ln(n) - \frac{\ln n}{2}$$

$$= \ln(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n) - \frac{\ln n}{2} = \ln(n!) - \frac{\ln n}{2}$$



Från

$$n \ln n - n + 1 \approx \ln(n!) - \frac{\ln n}{2}$$

fås

$$\ln(n!) \approx (n + \frac{1}{2}) \ln n - n + 1$$

vilket efter exponentiering av båda led ger en approximation av  $n!$ :

$$\begin{aligned} n! &\approx \exp\left((n + \frac{1}{2}) \ln n - n + 1\right) \\ &= n^{n+1/2} e^{-n+1} \\ &= e\sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \end{aligned}$$

Kurvan  $y = \ln x$  är **konkav**, så trapetsapproximationen ger en area som är **mindre** än den verkliga arean under kurvan. Detta medför att  $n! < e\sqrt{n}(n/e)^n$ , dvs. approximationen  $n! \approx e\sqrt{n}(n/e)^n$  ger alltid ett för **stort** värde.

Det visar sig att faktorn  $e$  kan bytas ut mot en annan (mindre) konstant så att approximationen blir bättre:

$$n! \approx C\sqrt{n}(n/e)^n \quad \text{för något lämpligt tal } C < e$$

- **Abraham de Moivre** 1730:

Gränsvärdet  $C = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{n} (n/e)^n} \in \mathbf{R}_+$  existerar.

(Bevis nedan.)

- **James Stirling** 1730:

$$C = \sqrt{2\pi} = 2,5066... < 2,71828... = e$$

(Bevis nedan.)

- Alltså Stirlings formel:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} (n/e)^n$$

- Kan preciseras, t.ex.

$$\sqrt{2\pi n} (n/e)^n e^{1/(12n+1)} < n! < \sqrt{2\pi n} (n/e)^n e^{1/(12n)}$$

**Bevis för att gränsvärdet  $C$  existerar och är positivt (inte noll):**

$$c_n = \frac{n!}{\sqrt{n} (n/e)^n} \quad d_n = \ln c_n = \ln(n!) - (n + \frac{1}{2}) \ln n + n$$

$$\begin{aligned} d_{k+1} - d_k &= \left( \ln((k+1)!) - (k + \frac{3}{2}) \ln(k+1) + (k+1) \right) \\ &\quad - \left( \ln(k!) - (k + \frac{1}{2}) \ln k + k \right) \\ &= 1 - (k + \frac{1}{2}) \ln \left( 1 + \frac{1}{k} \right) \quad [\text{Maclaurin: } \ln(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 + O(t^4), t \rightarrow 0] \\ &= 1 - (k + \frac{1}{2}) \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{3k^3} + O\left(\frac{1}{k^4}\right) \right) = -\frac{1}{12k^2} + O\left(\frac{1}{k^3}\right) \end{aligned}$$

Så  $D = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( d_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (d_{k+1} - d_k) \right) = d_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (d_{k+1} - d_k)$  existerar  
(som ett reellt tal, inte  $D = -\infty$ ). Alltså  $C = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{d_n} = e^D > 0$ .

**Bevis för att  $C = \sqrt{2\pi}$ :** Wallis' produkt ger

$$\begin{aligned}
 \frac{\pi}{2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left( \frac{2k}{2k-1} \cdot \frac{2k}{2k+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left( \frac{2k}{2k-1} \cdot \frac{2k}{2k} \cdot \frac{2k}{2k} \cdot \frac{2k}{2k+1} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^4 2^{4n}}{(2n)! (2n)! (2n+1)} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left( \frac{n!}{\sqrt{n} (n/e)^n} \right)^4 \left( \sqrt{n} (n/e)^n \right)^4 2^{4n}}{\left( \frac{(2n)!}{\sqrt{2n} (2n/e)^{2n}} \right)^2 \left( \sqrt{2n} (2n/e)^{2n} \right)^2 (2n+1)} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left( \frac{n!}{\sqrt{n} (n/e)^n} \right)^4}{\left( \frac{(2n)!}{\sqrt{2n} (2n/e)^{2n}} \right)^2 2 \left( 2 + \frac{1}{n} \right)} = \frac{C^4}{C^2 \cdot 2 \cdot 2} \implies C = \sqrt{2\pi}
 \end{aligned}$$

## Volymen av ett klot i $n$ dimensioner

Betrakta **enhetsklotet** i  $n$  dimensioner:

$$B_n = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1 \right\}$$

Vi ska beräkna dess  $n$ -dimensionella volym  $V_n$ .

(Volymen av ett  $n$ -dimensionellt klot med radien  $r$  blir då  $V_n r^n$ , och det  $(n - 1)$ -dimensionella areamåttet för dess sfäriska yta blir derivatan av volymen med avseende på radien, alltså  $nV_n r^{n-1}$ .)

Den  $n$ -dimensionella volymen definieras av en multipelintegral:

$$V_n \stackrel{\text{def.}}{=} \int \cdots \int_{B_n} dx_1 \cdots dx_n$$

”1-dimensionell volym” är **längd**, så  $V_1$  är längden av intervallet  $B_1 = [-1, 1]$  på tallinjen:

$$V_1 = \int_{B_1} dx_1 = \int_{-1}^1 dx_1 = 2$$

”2-dimensionell volym” är **area**, så  $V_2$  är arean av enhetscirkelskivan  $B_2 = \{x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$  i planet:

$$V_2 = \iint_{B_2} dx_1 dx_2 = \pi$$

För  $n \geq 3$  kan vi göra följande flervariabelanalysuträkning, återigen med **polära koordinater** och deras **lokala areaskala**  $r$  :

$$\begin{aligned} V_n &= \int \cdots \int_{B_n} dx_1 \cdots dx_n \\ &= \iint_{x_1^2 + x_2^2 \leq 1} \left( \int \cdots \int_{x_3^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1 - x_1^2 - x_2^2} dx_3 \cdots dx_n \right) dx_1 dx_2 \\ &= \iint_{x_1^2 + x_2^2 \leq 1} V_{n-2} \cdot \left( \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2} \right)^{n-2} dx_1 dx_2 \\ &= V_{n-2} \iint_{0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi < 2\pi} (1 - r^2)^{(n-2)/2} r dr d\varphi \\ &= 2\pi V_{n-2} \left[ -\frac{(1 - r^2)^{n/2}}{n} \right]_0^1 = \frac{2\pi}{n} V_{n-2} \end{aligned}$$



Denna rekursionsformel

$$V_n = \frac{2\pi}{n} V_{n-2} \quad \text{för } n \geq 3$$

bestämmer nu alla  $V_n$  från utgångsvärdena  $V_1 = 2$  och  $V_2 = \pi$ :

$$V_1 = \frac{2}{1} \Rightarrow V_3 = \frac{2}{1} \cdot \frac{2\pi}{3} \Rightarrow V_5 = \frac{2}{1} \cdot \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{2\pi}{5} \quad (\text{osv.})$$

$$V_2 = \frac{\pi}{1} \Rightarrow V_4 = \frac{\pi}{1} \cdot \frac{\pi}{2} \Rightarrow V_6 = \frac{\pi}{1} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{3} \quad (\text{osv.})$$

Resultat:

$$V_n = \begin{cases} \frac{2(2\pi)^k}{(2k+1)!!} & \text{för } n = 2k + 1 \\ \frac{\pi^k}{k!} & \text{för } n = 2k \end{cases}$$

Notationen "!!" betyder **semifakultet** (bara vartannat tal är med):

$$(2k+1)!! = (2k+1) \cdot (2k-1) \cdot \dots \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1$$

Följande uttryck täcker in båda fallen samtidigt:

$$V_n = \frac{\pi^{n/2} r^n}{(n/2)!}$$

Fakultet definieras här inte bara för heltal, utan t.o.m. för komplexa tal, via **gammafunktionen**:

$$z! = \Gamma(z + 1) \quad \text{för } z \in \mathbf{C} \setminus \{-1, -2, -3, \dots\}$$

Gammafunktionen definieras i högra komplexa halvplanet (dvs. för  $\operatorname{Re} z > 0$ ) av

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

och uppfyller där sambandet  $\Gamma(z + 1) = z \Gamma(z)$  (visas med partiell integration; se t.ex. [Wikipedia](#)). Den kan via detta samband utvidgas till  $\mathbf{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ .

Värdena  $(n/2)!$  för udda  $n$  beräknas med utgångspunkt i  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty t^{-1/2} e^{-t} dt =$

$$\left[ \begin{array}{l} t = x^2 (x \geq 0) \\ dt = 2x dx \end{array} \right] = \int_0^\infty \frac{1}{x} e^{-x^2} \cdot 2x dx = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \quad (\text{Gauss-integralen, s. 73}).$$