Skissa grafen för $f(x) = 2\ln(x+1) - \ln(x^2+1) + \dfrac{x}{x+1}$. Ange alla eventuella lodräta och vågräta asymptoter samt lokala extrempunkter.

$$f(x) = 2\ln(x+1) - \ln(x^2+1) + \frac{x}{x+1}$$

D_f ? $x+1>0$, $x+1 \neq 0$ så $D_f =]-1, \infty[$

$x \to -1^+$?

$$f(x) = \underbrace{2\ln(x+1)}_{\to -\infty} - \underbrace{\ln(x^2+1)}_{\to \ln 2} + \underbrace{\frac{1}{x+1}}_{\to \infty} \cdot \underbrace{x}_{\to -1} \to -\infty \text{ då } x \to -1^+$$

$x = -1$ är en lodrät asymptot

$x \to \infty$?

$$f(x) = \ln\frac{(x+1)^2}{x^2+1} + \frac{x}{x+1} = \ln\underbrace{\frac{\cancel{x^2}(1+\frac{1}{x})^2}{\cancel{x^2}(1+\frac{1}{x^2})}}_{\to 1} + \underbrace{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}_{\to 1} \to 0+1 = 1 \text{ då } x \to \infty$$

$y = 1$ är en vågrät asymptot då $x \to \infty$

$$f'(x) = \frac{2}{x+1} - \frac{2x}{x^2+1} + \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{\cancel{2x^3} + \cancel{2x} + 2x^2 + 2 - \cancel{2x^3} - 4x^2 - \cancel{2x} + 1 + x^2}{(x+1)^2(x^2+1)} =$$

$$= \frac{3-x^2}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)}{(x+1)^2(x^2+1)} = \underbrace{-\frac{x+\sqrt{3}}{(x+1)^2(x^2+1)}}_{g(x)}(x-\sqrt{3})$$

$f'(x) = 0 \iff x = \sqrt{3}$

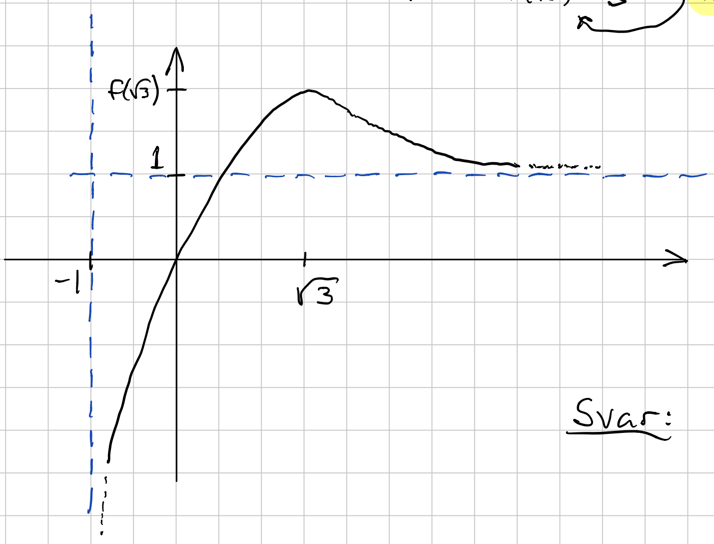
Teckentabell:

	-1		$\sqrt{3}$	
$g(x)$		$-$		$-$
$x-\sqrt{3}$		$-$	0	$+$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$f(\sqrt{3})$	$\searrow$

lok.max i $x = \sqrt{3}$

$f(\sqrt{3}) = 2\ln(\sqrt{3}+1) - \ln 4 + \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$

$f(0) = 0$ kan man se



Svar: $x = -1$ är en lodrät asymptot
$y = 1$ är en vågrät asymptot då $x \to \infty$
$x = \sqrt{3}$ är en lokal maximipunkt

Matematiska institutionen
Mikael Langer