

Undersök gränsvärdena

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{2x^2 + x - 3}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x + e^x} - 1}{x}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^2} + \ln x \right)$

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{2x^2 + x - 3}$ Typ $\left[\frac{0}{0} \right]$

Faktorisering av nämnare och täljare:

$$x^2 + x - 2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - \frac{8}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 =$$

$$= \left(x + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right) = (x+2)(x-1)$$

$$2x^2 + x - 3 = 2\left(x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\right) = 2\left(\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} - \frac{24}{16}\right) =$$

$$= 2\left(\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2\right) = 2\left(x + \frac{1}{4} + \frac{5}{4}\right)\left(x + \frac{1}{4} - \frac{5}{4}\right) =$$

$$= 2\left(x + \frac{3}{2}\right)(x-1) = (2x+3)(x-1)$$

$$\frac{x^2 + x - 2}{2x^2 + x - 3} = \frac{(x+2)(x-1)}{(2x+3)(x-1)} = \frac{x+2}{2x+3} \rightarrow \frac{1+2}{2+3} = \frac{3}{5} \text{ då } x \rightarrow 1$$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x + e^x} - 1}{x}$ Typ $\left[\frac{0}{0} \right]$

$$\frac{\sqrt{2x + e^x} - 1}{x} = \frac{2x + e^x - 1}{x(\sqrt{2x + e^x} + 1)} = \frac{1}{\underbrace{\sqrt{2x + e^x} + 1}_{\rightarrow 2}} \left(2 + \overbrace{\frac{e^x - 1}{x}}^{\rightarrow 1 \text{ då } x \rightarrow 0} \right) \text{ (standardgrn)}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}(2+1) = \frac{3}{2} \text{ då } x \rightarrow 0$$

c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^2} + \ln x \right)$ Typ $\left[\infty - \infty \right]$

$$\frac{1}{x^2} + \ln x = \frac{1}{x^2} \left(1 + x^2 \ln x\right) \rightarrow \infty \text{ då } x \rightarrow 0^+$$

$\rightarrow \infty$
 $\rightarrow 0$ då $x \rightarrow 0^+$ (standardgrn $x^a \ln x \rightarrow 0, x \rightarrow 0^+$)
 om $a > 0$

Svar: a) $3/5$

b) $3/2$

c) ∞