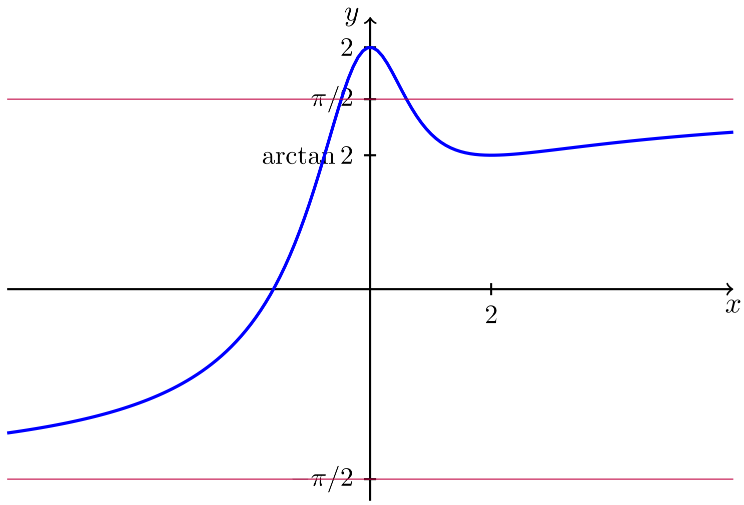
LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen

Lösningsskisser för TATA41 210327 (eftermiddag)

1) f är definierad för $x \in \mathbf{R}$. Standardräkningar (gör!) ger $f'(x) = \dfrac{2x(x-2)}{(1+x^2)^2}$. Teckentabell:

x		0		2	
$2x$	$-$	0	$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$
$(1+x^2)^2$	$+$		$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

Vi ser att $f(x) = \arctan x + \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{-1+2/x}{1+1/x^2} \to \pm\dfrac{\pi}{2}$, $x \to \pm\infty$. Vidare är $f(0) = 2$ och $f(2) = \arctan 2$. Detta ger grafen



Svar: Graf enligt ovan. Lodräta asymptoter saknas. Linjerna $y = \pm\dfrac{\pi}{2}$ är vågräta asymptoter då $x \to \pm\infty$. f har en lokal maximipunkt i $x = 0$ (med det lokala och globala maximivärdet $f(0) = 2$) och en lokal mimimipunkt i $x = 2$ (med det lokala minimivärdet $f(2) = \arctan 2$).

2a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin 2x}-1}{\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin 2x}-1}{\sin 2x} \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{2}{\frac{\ln(1+x)}{x}} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{1} = 2$ enligt standardgränsvärden.

2b) Förlängning med täljarens och nämnarens konjugatkvantiteter ger

$$\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1+3x}}{\sqrt{1+4x}-\sqrt{1-5x}} = \frac{1+2x-(1+3x)}{\sqrt{1+2x}+\sqrt{1+3x}} \cdot \frac{\sqrt{1+4x}+\sqrt{1-5x}}{1+4x-(1-5x)} = -\frac{1}{9}\frac{\sqrt{1+4x}+\sqrt{1-5x}}{\sqrt{1+2x}+\sqrt{1+3x}}$$
$$\to -\frac{1}{9}\frac{\sqrt{1}+\sqrt{1}}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = -\frac{1}{9}, \; x \to 0.$$

2c) $\dfrac{ex^3 - (\sqrt[3]{x})^e}{e^{x^{1/3}}} = \Big/ t = x^{1/3} \to \infty\,,\ x \to \infty \Big/ = e \cdot \dfrac{t^9}{e^t} - \dfrac{t^e}{e^t} \to 0\,,\ x \to \infty$ (standardgränsvärde).

Svar: (a) 2 (b) $-\dfrac{1}{9}$ (c) 0.

3a) Polynomdivision ger (C är en godtycklig konstant)

$$\int \frac{2x^3 - x^2 - 3x - 1}{x^2+1}\,dx = \int \left(2x - 1 - \frac{5x}{x^2+1}\right) dx = x^2 - x - \frac{5}{2}\ln(x^2+1) + C.$$

3b) Variabelbytet $t = \cos x$, $dt = -\sin x\,dx$ ger (C är en godtycklig konstant)

$$\int \cos 2x \sin x\,dx = \int (2\cos^2 x - 1)\sin x\,dx = \int (1-2t^2)\,dt = t - \frac{2}{3}t^3 + C = \cos x - \frac{2}{3}\cos^3 x + C.$$

3c) Variabelbytet $t = \ln x$, $dt = \dfrac{dx}{x}$ samt en partialintegration ger (C är en godtycklig konstant)

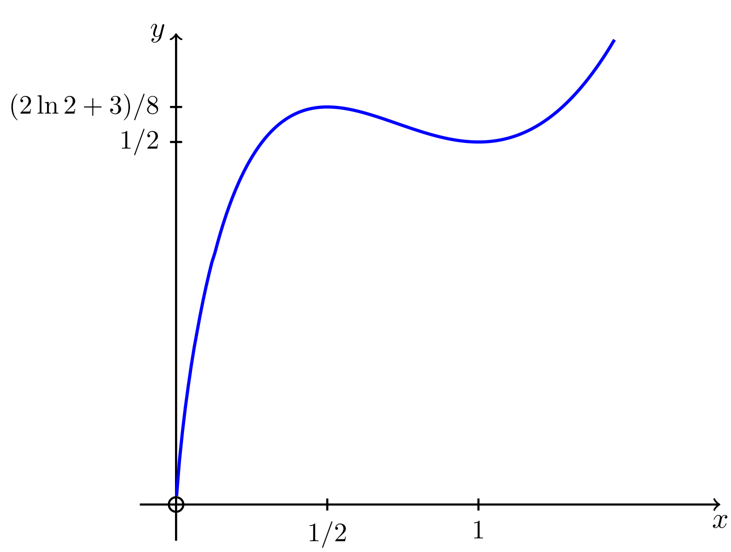
$$\begin{aligned}\int \frac{\ln x \cdot \sin(\ln x)}{x}\,dx &= \int t \sin t\,dt = -t\cos t + \int \cos t\,dt = \sin t - t\cos t + C \\ &= \sin(\ln x) - \ln x \cdot \cos(\ln x) + C.\end{aligned}$$

Svar: (a) $x^2 - x - \dfrac{5}{2}\ln(x^2+1) + C$ (b) $\cos x - \dfrac{2}{3}\cos^3 x + C$ (c) $\sin(\ln x) - \ln x \cdot \cos(\ln x) + C$.

4) Sätt $f(x) = (x^2 - x)\ln x - \dfrac{x^2}{2} + x$. f är definierad för $x > 0$ och ekvationen är ekvivalent med $f(x) = k$. Vi får $f'(x) = (2x-1)\ln x$ och enligt ett standardgränsvärde är $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ och då $f(x) = x^2 \ln x \left(1 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2\ln x} + \dfrac{1}{x \ln x}\right)$ följer att $f(x) \to \infty\,,\ x \to \infty$. Teckentabell:

x	0		1/2		1	
$\ln x$	ej def.	$-$		$-$	0	$+$
$2x-1$		$-$	0	$+$		$+$
$f'(x)$	ej def.	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	ej def.	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

Beräkning av funktionsvärdena $f(1/2) = \dfrac{2\ln 2 + 3}{8}$, $f(1) = \dfrac{1}{2}$ ger grafen



Avläsning i grafen (Obs: $f(0)$ är *ej* definierat!) ger antalet lösningar för olika värden på k.

Svar: Inga lösningar om $k \le 0$. 1 lösning om $0 < k < \dfrac{1}{2}$ eller $k > \dfrac{2\ln 2 + 3}{8}$. 2 lösningar om $k = \dfrac{1}{2}$ eller $k = \dfrac{2\ln 2 + 3}{8}$. 3 lösningar om $\dfrac{1}{2} < k < \dfrac{2\ln 2 + 3}{8}$.

5) Faktorisering följd av partialbråksuppdelning (genomför detaljerna!) ger (I = sökt integral)

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{a\to\infty} \int_2^a \frac{dx}{(3x+1)(x-1)(x+1)} = \frac{1}{8} \lim_{a\to\infty} \int_2^a \left(\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1} - \frac{9}{3x+1} \right) dx \\
&= \frac{1}{8} \lim_{a\to\infty} \left[\ln|x-1| + 2\ln|x+1| - 3\ln|3x+1| \right]_2^a = \frac{1}{8} \left(\lim_{a\to\infty} \ln\left(\frac{(a-1)(a+1)^2}{(3a+1)^3} \right) - 2\ln 3 \right) \\
&\quad + \frac{3\ln 7}{8} = \frac{1}{8} \lim_{a\to\infty} \ln\left(\frac{(1-1/a)(1+1/a)^2}{(3+1/a)^3} \right) + \frac{3\ln 7 - 2\ln 3}{8} = \frac{3\ln 7 - 5\ln 3}{8} = \frac{1}{8}\ln\frac{343}{243}.
\end{aligned}
$$

Svar: Integralen är konvergent med värdet $\dfrac{3\ln 7 - 5\ln 3}{8}$.

6) Vi studerar först fallet $x = 0$:

$$
f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2\ln|h| + h - 0}{h} = \lim_{h\to 0} (h\ln|h| + 1) = 1,
$$

enligt ett standardgränsvärde. För $x \neq 0$ fås

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2\ln|x+h| + x + h - x^2\ln|x| - x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(x^2 \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} \cdot \frac{1}{x} + (2x+h)\ln|x+h| + 1 \right) = x + 2x\ln|x| + 1,
\end{aligned}
$$

enligt standardgränsvärdet $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$ och där vi också använt att $\ln|x|$ är kontinuerlig.

Svar: $f'(x) = \begin{cases} x + 2x\ln|x| + 1 & , \quad x \neq 0 \\ 1 & , \quad x = 0 \end{cases}$.

7) Enligt satsen om största och minsta värde antar f ett största värde M och ett minsta värde m på $[0,3]$. För $x \in [0,3]$ gäller då att

$$
mx^2 \le x^2 f(x) \le Mx^2 \Rightarrow \int_0^3 mx^2\,dx \le \int_0^3 x^2 f(x)\,dx \le \int_0^3 Mx^2\,dx \Leftrightarrow m \le \frac{1}{9}\int_0^3 x^2 f(x)\,dx \le M.
$$

Men enligt satsen om mellanliggande värde antar f alla värden mellan m och M så speciellt finns ett tal $\xi \in [0,3]$ så att $f(\xi) = \dfrac{1}{9}\displaystyle\int_0^3 x^2 f(x)\,dx \Leftrightarrow \int_0^3 x^2 f(x)\,dx = 9f(\xi)$, vilket skulle visas.

Svar: Se ovan.

Alternativ: Integralkalkylens generaliserade medelvärdessats (se boken) kan också användas.