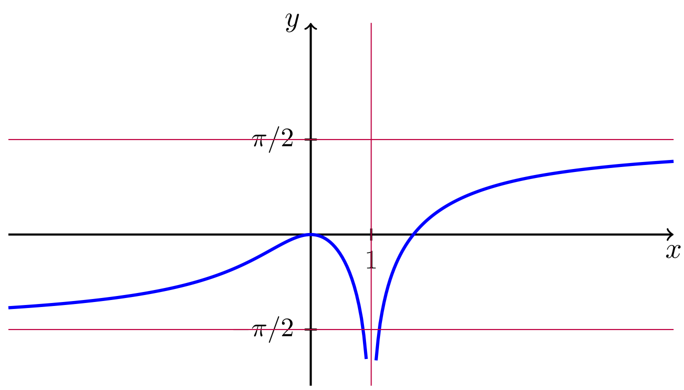
LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen

Lösningsskisser för TATA41 210327 (förmiddag)

1) f är definierad för $x \neq 1$. Standardräkningar (genomför dessa!) ger $f'(x) = \dfrac{2x}{(1+x^2)(x-1)}$.
Teckentabell:

x		0		1	
$2x$	$-$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$1+x^2$	$+$		$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	ej def.	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	ej def.	$\nearrow$

Notera att $f(x) \to -\infty\,,\ x \to 1$ och då $f(x) = \arctan x + \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}{1+\frac{1}{x^2}}$ blir $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\dfrac{\pi}{2}$.
Detta ger grafen



Svar: Graf enligt ovan. Linjen $x = 1$ är en lodrät asymptot och linjerna $y = \pi/2$ och $y = -\pi/2$ är vågräta asymptoter då $x \to \infty$ resp. $x \to -\infty$. f har en lokal maximipunkt i $x = 0$ (med det lokala maximivärdet $f(0) = 0$) och inga andra lokala extrempunkter.

2a) Både täljare och nämnare blir 0 då $x = -2$ så faktorsatsen ger att $x + 2$ är en faktor i både täljare och nämnare. Med polynomdivision (eller något annat, genomför detaljerna!) fås

$$\frac{x^2-x-6}{x^2-3x-10} = \frac{(x+2)(x-3)}{(x+2)(x-5)} = \frac{x-3}{x-5} \to \frac{5}{7}\,,\ x \to -2.$$

2b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{4x}-e^{3x}}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x}}{2} \cdot \dfrac{e^x-1}{x} = \dfrac{1}{2}$, enligt ett standardgränsvärde.

2c) Då $\cos\dfrac{1}{x} \to 1\,,\ x \to \infty$, $\cos(2n\pi) = 1$ och $\cos\left((2n+1)\pi\right) = -1$ för heltal n följer att $\cos x \cos\dfrac{1}{x}$ antar värden godtyckligt nära både 1 och -1 för godtyckligt stora x. Det givna gränsvärdet existerar därför inte.

Svar: (a) $\frac{5}{7}$. (b) $\frac{1}{2}$ (c) Existerar ej.

3a) Variabelsubstitutionen $t = 1 + \sqrt{x}$ med $dt = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$ ger (C är en godtycklig konstant)

$$\int \frac{(1+\sqrt{x})^5}{\sqrt{x}}\,dx = \int 2t^5\,dt = \frac{t^6}{3} + C = \frac{(1+\sqrt{x})^6}{3} + C.$$

3b) Partialbråksuppdelning (genomför detaljerna!) ger (C är en godtycklig konstant)

$$\int \frac{x}{x^2+x-12}\,dx = \int \frac{x}{(x+4)(x-3)}\,dx = \int \left(\frac{4/7}{x+4} + \frac{3/7}{x-3}\right)dx = \frac{4}{7}\ln|x+4| + \frac{3}{7}\ln|x-3| + C.$$

3c) Partiell integration samt en kort polynomdivision ger (C är en godtycklig konstant)

$$\int x\arctan 2x\,dx = \frac{x^2}{2}\arctan 2x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{2}{1+4x^2}\,dx = \frac{x^2}{2}\arctan 2x - \frac{1}{4}\int \frac{1+4x^2-1}{1+4x^2}\,dx$$
$$= \frac{4x^2+1}{8}\arctan 2x - \frac{x}{4} + C.$$

Svar: (a) $\dfrac{(1+\sqrt{x})^6}{3} + C$ (b) $\dfrac{4}{7}\ln|x+4| + \dfrac{3}{7}\ln|x-3| + C$ (c) $\dfrac{4x^2+1}{8}\arctan 2x - \dfrac{x}{4} + C$.

4) Sätt $f(x) = \ln\left(1+e^{-x}\right) - \dfrac{1}{1+e^x}$. Då är f definierad för alla x och givna olikheten är ekvivalent med att $f(x) > 0$. Derivering ger

$$f'(x) = \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} + \frac{e^x}{(1+e^x)^2} = -\frac{1}{1+e^x} + \frac{e^x}{(1+e^x)^2} = -\frac{1}{(1+e^x)^2} < 0$$

för alla $x \in \mathbf{R}$. f är alltså strängt avtagande enligt sats och då $f(x) \to 0\,,\ x \to \infty$ följer att $f(x) > 0$ för alla $x \in \mathbf{R}$ och resultatet följer.

Svar: Se ovan.

5) Variabelsubstitutionen $t = \ln x$ med $dt = \dfrac{dx}{x}$ samt partialbråksuppdelning (genomför detaljerna!) ger (I = sökt integral)

$$I = \lim_{a\to\infty}\int_0^a \frac{t\,dt}{t^3+6t^2+11t+6} = \cdots = \lim_{a\to\infty}\int_0^a \left(\frac{2}{t+2} - \frac{1/2}{t+1} - \frac{3/2}{t+3}\right)dt$$
$$= \lim_{a\to\infty}\left[2\ln(t+2) - \frac{1}{2}\ln(t+1) - \frac{3}{2}\ln(t+3)\right]_0^a = \frac{1}{2}\lim_{a\to\infty}\ln\left(\frac{(a+2)^4}{(a+1)(a+3)^3}\right)$$
$$-2\ln 2 + \frac{3}{2}\ln 3 = \frac{1}{2}\lim_{a\to\infty}\ln\left(\frac{(1+2/a)^4}{(1+1/a)(1+3/a)^3}\right) + \frac{1}{2}\ln\frac{27}{16} = \frac{1}{2}\ln\frac{27}{16}.$$

Svar: Integralen är konvergent med värdet $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{27}{16}$.

6) Vi ser direkt att $I(1) = \displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C$ där C är en godtycklig konstant. För $a \neq 1$ ger variabelbytet $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x\,dx$ att $I(a) = \displaystyle\int \frac{\cos x\,dx}{1+(a-1)\sin^2 x} = \int \frac{dt}{1+(a-1)t^2}$.

För $a > 1$ fås (C är en godtycklig konstant)

$$I(a) = \frac{1}{\sqrt{a-1}} \arctan\left(\sqrt{a-1}\, t\right) + C = \frac{1}{\sqrt{a-1}} \arctan\left(\sqrt{a-1}\, \sin x\right) + C.$$

För $a < 1$ sätter vi $b = \sqrt{1-a} > 0$ varefter partialbråksuppdelning ger (C är en godtycklig konstant)

$$I(a) = \int \frac{dt}{1-b^2t^2} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1-bt} + \frac{1}{1+bt} \right) dt = \frac{1}{2b} \ln \left| \frac{1+bt}{1-bt} \right| + C = \frac{1}{2b} \ln \left| \frac{1+b\sin x}{1-b\sin x} \right| + C.$$

Svar: $I(1) = \sin x + C$, $I(a) = \dfrac{1}{\sqrt{a-1}} \arctan\left(\sqrt{a-1}\, \sin x\right) + C$ för $a > 1$ och $I(a) = \dfrac{1}{2\sqrt{1-a}} \ln \left| \dfrac{1+\sqrt{1-a}\, \sin x}{1-\sqrt{1-a}\, \sin x} \right| + C$ för $a < 1$.

7) Sätt $g(t) = \ln(f(a+t))$ då är g väldefinierad för t nära 0 och $g(0) = 0$. Betrakta

$$f(a+t)^{1/t} = e^{\frac{\ln(f(a+t))}{t}} = e^{\frac{g(t)-g(0)}{t}} \to e^{g'(0)}\,,\ t \to 0,$$

och då $g'(t) = D\left(\ln\left(f(a+t)\right)\right) = \dfrac{f'(a+t)}{f(a+t)}$ följer att $\lim\limits_{t\to 0} f(a+t)^{1/t} = e^{f'(a)}$.

Alternativ: $f(a+t)^{1/t} = e^{\frac{\ln(f(a+t))}{t}} = e^{\frac{\ln(1+f(a+t)-1)}{f(a+1)-1} \cdot \frac{f(a+t)-1}{t}}$.

Då f är deriverbar, och därmed kontinuerlig i a följer att $f(a+t) - 1 \to f(a) - 1 = 0\,,\ t \to 0$. Första faktorn i exponenten går därmed mot 1 enligt ett standardgränsvärde. Andra faktorn kan skrivas $\dfrac{f(a+t)-f(a)}{t} \to f'(a)\,,\ t \to 0$ och det följer att $f(a+t)^{1/t} \to e^{f'(a)}\,,\ t \to 0$.

Svar: $\lim\limits_{t\to 0} f(a+t)^{1/t} = e^{f'(a)}$.