LINKÖPINGS UNIVERSITET | TATA41
Matematiska institutionen | TEN1

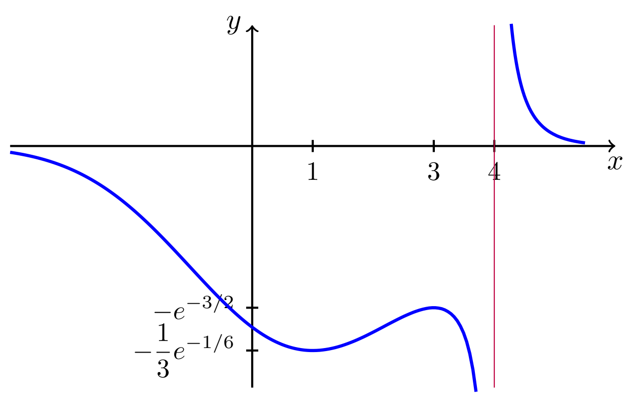
Lösningsskisser för TATA41 210328 (eftermiddag)

1) f är definierad för $x \neq 4$. Standardräkningar (genomför dessa!) ger $f'(x) = \dfrac{e^{-x^2/6}(3-x)(x-1)}{3(x-4)^2}$.

Teckentabell:

x		1		3		4	
$e^{-x^2/6}$	$+$		$+$		$+$		$+$
$3-x$	$+$		$+$	0	$-$		$-$
$x-1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$3(x-4)^2$	$+$		$+$		$+$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	ej def.	$-$
$f(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	ej def.	$\searrow$

Vi ser att $f(x) = \dfrac{e^{-x^2/6}}{x-4} \to \pm\infty\,,\ x \to 4\pm$ och $f(x) \to 0\,,\ x \to \pm\infty$. Detta ger grafen



Svar: Graf enligt ovan. Linjen $x = 4$ är en lodrät asymptot och linjen $y = 0$ är en vågrät asymptot då $x \to \infty$ och då $x \to -\infty$. f har en lokal minimipunkt i $x = 1$ (med det lokala minimivärdet $f(1) = -\dfrac{1}{3}e^{-1/6}$) och en lokal maximipunkt i $x = 3$ (med det lokala maximivärdet $f(3) = -e^{-3/2}$).

2a) Enligt ett standardgränsvärde är

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x + x^3}{x^5 + e^{3+x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + \frac{x^3}{e^x}}{\frac{x^5}{e^x} + e^3} = \frac{1}{e^3}.$$

2b) $\dfrac{e^{x^2}-1}{(e^{2x}-1)\sin \pi x} = \dfrac{e^{x^2}-1}{x^2} \cdot \dfrac{1}{\frac{e^{2x}-1}{2x}} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{\frac{\sin \pi x}{\pi x}} \cdot \dfrac{1}{\pi} \to \dfrac{1}{2\pi}\,,\ x \to 0$ enligt standardgränsvärden.

2c) Variabelbytet $t = x - 1$ samt en förlängning med en konjugatkvantitet ger

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{\sqrt{x}-1} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{\sqrt{1+t}-1} = \lim_{t\to 0} \ln(1+t) \cdot \frac{\sqrt{1+t}+1}{1+t-1} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} \cdot \left(\sqrt{1+t}+1\right) = 2,$$

enligt ett standardgränsvärde.

Svar: (a) $\dfrac{1}{e^3}$ (b) $\dfrac{1}{2\pi}$ (c) 2.

3a) Variabelbytet $t = 1 + \sqrt{x} \Leftrightarrow x = (t-1)^2, t \geq 1,\ dx = 2(t-1)\,dt$ ger (C och D är godtyckliga konstanter)

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \int \frac{2(t-1)}{t}\,dt = 2t - 2\ln|t| + D = 2\sqrt{x} - 2\ln(1+\sqrt{x}) + C.$$

3b) Partiell integration ger (C är en godtycklig konstant)

$$\int \arcsin 2x\,dx = x\arcsin 2x - \int \frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx = x\arcsin 2x + \frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2} + C.$$

3c) Partiell integration ger (C är en godtycklig konstant)

$$\int x^2 \ln|x|\,dx = \frac{x^3}{3}\ln|x| - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^3}{9}(3\ln|x|-1) + C.$$

Svar: (a) $2\sqrt{x} - 2\ln(1+\sqrt{x}) + C$ (b) $x\arcsin 2x + \dfrac{1}{2}\sqrt{1-4x^2} + C$ (c) $\dfrac{x^3}{9}(3\ln|x|-1) + C$.

4) Sätt $f(x) = 8x - 3\arctan 2x - 2\ln(1+4x^2)$. f är definierad för $x \in \mathbf{R}$ och olikheten är ekvivalent med att $f(x) > 0$. Standardräkningar (genomför dessa!) ger att $f'(x) = \dfrac{2(4x-1)^2}{1+4x^2}$. Vi ser att $f'(x) > 0$ för alla x utom för $x = 1/4$. Enligt sats är därför $f(x)$ strängt växande och då $f(0) = 0$ följer det att $f(x) < 0$ för $x < 0$ och $f(x) > 0$ för $x > 0$.

Givna olikheten är alltså sann om och endast om $x > 0$.

Svar: $x > 0$.

5) Partiell integration och partialbråksuppdelning (genomför detaljerna!) ger (I = sökt integral)

$$I = \lim_{a\to\infty} \int_1^a \frac{\arctan x}{x^3}\,dx = \lim_{a\to\infty} \left(\left[-\frac{\arctan x}{2x^2} \right]_1^a + \frac{1}{2}\int_1^a \frac{dx}{x^2(1+x^2)} \right)$$

$$= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\lim_{a\to\infty} \int_1^a \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\lim_{a\to\infty} \left[-\frac{1}{x} - \arctan x \right]_1^a = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}.$$

Svar: Integralen är konvergent med värdet $\dfrac{1}{2}$.

6) Låt $a > 0$. Tangenten till kurvan i punkten (a, a^3) har lutningen $f'(a)$. Normalen är vinkelrät mot tangenten och får därför lutningen $-\dfrac{1}{f'(a)}$.

Ekvationen för normalen i denna punkt blir därför $y - a^3 = -\dfrac{1}{3a^2}(x-a)$. y-koordinaten för normalens skärningspunkt med y-axeln blir därför $a^3 + \dfrac{1}{3a} =: g(a)$, där $a > 0$, och vi söker värdemängden V_g till g.

Derivering ger $g'(a) = 3a^2 - \dfrac{1}{3a^2} = \dfrac{(\sqrt{3}a-1)(\sqrt{3}a+1)(3a^2+1)}{3a^2}$, så $g'(a) = 0$ då $a = 1/\sqrt{3}$, $g'(a) < 0$ då $0 < a < 1/\sqrt{3}$ och $g'(a) > 0$ då $a > 1/\sqrt{3}$. Dessutom gäller att $g(a) \to \infty$ då $a \to 0$ och då $a \to \infty$. Det följer att $V_g = \left[g(1/\sqrt{3}), \infty\right[= \left[\dfrac{4}{3\sqrt{3}}, \infty\right[$

Svar: Sökta y koordinaten kan anta alla värden $\geq \dfrac{4}{3\sqrt{3}}$.

7) Med variabelbytet $t = nx$ fås $a_n = \int_0^\infty f(nx)\,dx = \dfrac{1}{n}\int_0^\infty f(t)\,dt \to 0\,,\ n \to \infty$ ty $\int_0^\infty f(t)\,dt$ är konvergent enligt förutsättning. Sätt nu $g(x) = \arcsin x$. Sökta gränsvärdet blir då

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6\arcsin\left(a_n + \frac{1}{2}\right) - \pi}{a_n} = 6 \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g\left(\frac{1}{2}+h\right) - g\left(\frac{1}{2}\right)}{h} = 6g'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{6}{\sqrt{1-(1/2)^2}} = 4\sqrt{3},$$

enligt definitionen av derivata och där vi satt $h = a_n$ i första likheten.

Svar: $4\sqrt{3}$.