LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen

TATA41
TEN1

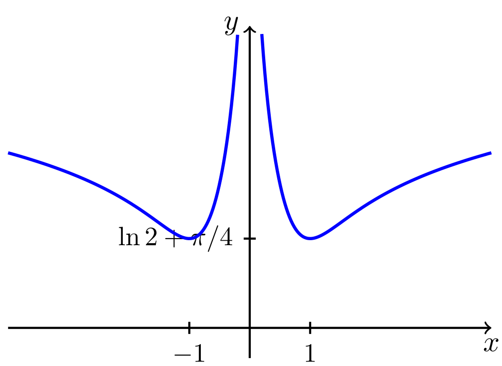
Lösningsskisser för TATA41 210328 (förmiddag)

1) f är definierad för $x \neq 0$. Standardräkningar (genomför dessa!) ger $f'(x) = \dfrac{(x^2+3)(x-1)(x+1)}{x(1+x^4)}$.

Teckentabell:

x		-1		0		1	
x^2+3	$+$		$+$		$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$1+x^4$	$+$		$+$		$+$		$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	ej def.	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$	ej def.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

Vi ser att $f(x) \to \infty$, $x \to 0$ och $f(x) = \ln\left(|x| + \dfrac{1}{|x|^3}\right) + \arctan x^2 \to \infty$, $x \to \pm\infty$. Vidare är $f(1) = f(-1) = \ln 2 + \dfrac{\pi}{4}$. Detta ger grafen



Svar: Graf enligt ovan. Linjen $x = 0$ är en lodrät asymptot, vågräta asymptoter saknas. f har lokala (t o m globala!) minimipunkter i $x = -1$ och $x = 1$ (med det gemensamma lokala (globala!) minimivärdet $f(1) = f(-1) = \ln 2 + \pi/4$).

Anmärkning: Då f är en jämn funktion (ty $f(-x) = f(x)$ för alla $x \in D_f$) hade det också gått bra att göra funktionsundersökningen för $x > 0$, och sedan spegla den graf man då får i y-axeln.

2a) Förlängning med konjugatkvantiteten ger

$$\lim_{x\to\infty} x - \sqrt{x^2+4x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-(x^2+4x)}{x+\sqrt{x^2+4x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-4}{1+\sqrt{1+\frac{4}{x}}} = \frac{-4}{1+\sqrt{1}} = -2,$$

där vi har använt att $x > 0$ i andra likheten.

2b) $(1+3x)^{\frac{1}{4x}} = e^{\ln(1+3x)^{\frac{1}{4x}}} = e^{\frac{\ln(1+3x)}{3x}\cdot\frac{3}{4}} \to e^{1\cdot\frac{3}{4}} = e^{\frac{3}{4}}$, $x \to 0$ enligt ett standardgränsvärde.

2c) Variabelbytet $t = x - e$ ger

$$\lim_{x\to e} \frac{1-\ln x}{x^2-e^2} = \lim_{t\to 0} \frac{1-\ln(e+t)}{t(t+2e)} = \lim_{t\to 0} \frac{1-\left(\ln e + \ln\left(1+\frac{t}{e}\right)\right)}{t(2e+t)} = -\lim_{t\to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{t}{e}\right)}{\frac{t}{e}} \cdot \frac{1}{e(2e+t)} = -\frac{1}{2e^2},$$

enligt ett standardgränsvärde.

Svar: (a) -2 (b) $e^{\frac{3}{4}}$ (c) $-\dfrac{1}{2e^2}$.

3a) Två partialintegrationer ger (C är en godtycklig konstant)

$$\int (t^2+t)e^{2t}\,dt = \frac{t^2+t}{2}e^{2t} - \int \frac{2t+1}{2}e^{2t}\,dt = \frac{2t^2-1}{4}e^{2t} + \int \frac{1}{2}e^{2t}\,dt = \frac{t^2}{2}e^{2t} + C.$$

3b) $\displaystyle \int \frac{dx}{\sqrt{2-2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{3-(x+1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}} = \arcsin \frac{x+1}{\sqrt{3}} + C$, där C är en godtycklig konstant.

3c) Kort polynomdivision samt partialbråksuppdelning ger (C är en godtycklig konstant)

$$\int \frac{x^2}{x^2-1}\,dx = \int \frac{x^2-1+1}{x^2-1}\,dx = \int \left(1 + \frac{1/2}{x-1} - \frac{1/2}{x+1}\right)dx = x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C.$$

Svar: (a) $\dfrac{t^2}{2}e^{2t} + C$ (b) $\arcsin \dfrac{x+1}{\sqrt{3}} + C$ (c) $x + \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| + C$.

4) Variabelbytet $t = e^x$, $dt = e^x dx$ följt av partialbråksuppdelning (genomför detaljerna!) ger ($I =$ sökt integral)

$$\begin{aligned} I &= \lim_{a\to\infty} \int_2^a \frac{dt}{t^3-t^2+4t-4} = \lim_{a\to\infty} \int_2^a \frac{dt}{(t-1)(t^2+4)} = \frac{1}{5}\lim_{a\to\infty} \int_2^a \left(\frac{1}{t-1} - \frac{t+1}{t^2+4}\right)dt \\ &= \frac{1}{5}\lim_{a\to\infty} \left[\ln|t-1| - \frac{1}{2}\ln(t^2+4) - \frac{1}{2}\arctan\frac{t}{2}\right]_2^a = \frac{1}{10}\lim_{a\to\infty}\left(\ln\frac{(a-1)^2}{a^2+4} - \arctan\frac{a}{2}\right) \\ &\quad + \frac{\ln 8}{10} + \frac{\pi}{40} = \frac{1}{10}\lim_{a\to\infty}\left(\ln\frac{(1-1/a)^2}{1+4/a^2} - \arctan\frac{a}{2}\right) + \frac{12\ln 2+\pi}{40} = \frac{12\ln 2-\pi}{40}. \end{aligned}$$

Svar: Integralen är konvergent med värdet $\dfrac{12\ln 2-\pi}{40}$.

5a) Se kursboken.

5b) Enligt definitionen av derivata och efter en förlängning med konjugatkvantiteten fås

$$\begin{aligned} g_1'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{g_1(x+h)-g_1(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x+h}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{h\sqrt{x+h}\sqrt{x}} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x-(x+h)}{h\sqrt{x+h}\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})} = -\lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

för $x \neq 0$. Vidare är

$$g_2'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g_2(x+h)-g_2(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln|x+h| - \ln|x|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x},$$

för $x \neq 0$, enligt ett standardgränsvärde.

Svar: (a) Se kursboken (b) $g_1'(x) = -\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$ och $g_2'(x) = \dfrac{1}{x}$.

6) Sätt $f(x) = x \arctan x - \ln(1+x^2)$. f är definierad för $x \in \mathbf{R}$ och olikheten är ekvivalent med att $f(x) \geq 0$. Standardräkningar (genomför dessa!) ger att $f'(x) = \arctan x - \dfrac{x}{1+x^2}$. Vi ser att $x = 0$ är ett nollställe till f'. För att ta reda på om det finns fler deriverar vi en gång till och får $f''(x) = \dfrac{2x^2}{(1+x^2)^2} > 0$ för alla x utom för $x = 0$. Enligt sats är därför $f'(x)$ strängt växande och $x = 0$ är därför det enda nollstället till $f'(x)$ och det följer också att $f'(x) < 0$ för $x < 0$ och $f'(x) > 0$ för $x > 0$.

f är därför strängt avtagande på $x \leq 0$ och strängt växande på $x \geq 0$ varför $f(0) = 0$ är f:s minsta värde. Alltså är $f(x) \geq 0$ för alla $x \in \mathbf{R}$, vilket skulle visas.

Svar: Se ovan.

7) Betrakta

$$\int_0^\omega (f(t) - f(t+x))\,dt = \int_0^\omega f(t)\,dt - \int_0^\omega f(t+x)\,dt = \int_0^\omega f(t)\,dt - \int_x^{x+\omega} f(t)\,dt = \int_0^x f(t)\,dt - \int_\omega^{x+\omega} f(t)\,dt$$

där vi ersatt $t + x$ med t i den andra integralen (rita en figur för att se varför sista likheten är sann!). Integralkalkylens medelvärdessats ger nu att

$$\int_0^\omega (f(t) - f(t+x))\ dt = \int_0^x f(t)\,dt - \int_\omega^{x+\omega} f(t)\,dt = \int_0^x f(t)\,dt - xf(\xi),$$

för något ξ med $\omega \leq \xi \leq x + \omega$. Enligt instängningsregeln gäller därför att $\xi \to \infty$, $\omega \to \infty$ så från förutsättningen följer det att $f(\xi) \to A$, $\omega \to \infty$. Alltså är

$$\lim_{\omega\to\infty} \int_0^\omega (f(t) - f(t+x))\ dt = \lim_{\omega\to\infty} \left(\int_0^x f(t)\,dt - xf(\xi) \right) = \int_0^x f(t)\,dt - Ax$$

vilket visar att $\displaystyle\int_0^\infty (f(t) - f(t+x))\ dt$ är konvergent och att $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt - Ax$. Analysens huvudsats ger nu att $g'(x) = f(x) - A$ eftersom f är kontinuerlig, så g är deriverbar.

Svar: Se ovan.