LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen

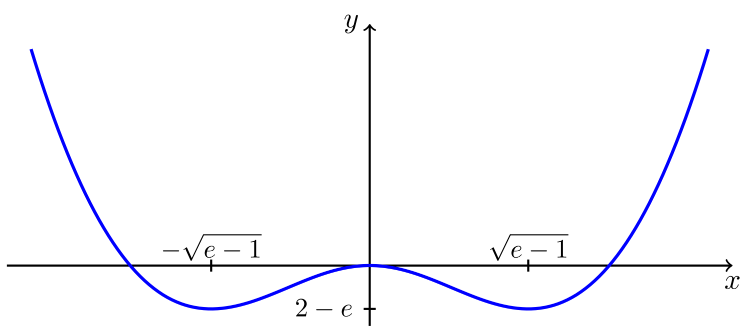
TATA41
TEN1

Lösningsskisser för TATA41 210612 (eftermiddag)

1) f är definierad för $x \in \mathbf{R}$. Standardräkningar (Genomför dessa!) ger $f'(x) = 2x\left(\ln(1+x^2)-1\right)$. Observera att $\ln(1+x^2) - 1 < 0 \Leftrightarrow x^2 < e-1 \Leftrightarrow -\sqrt{e-1} < x < \sqrt{e-1}$ eftersom ln är strängt växande. Detta ger teckentabellen:

x		$-\sqrt{e-1}$		0		$\sqrt{e-1}$	
$2x$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$\ln(1+x^2)-1$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

Vi ser att $f(x) = x^2\left((1+1/x^2)\ln(1+x^2)-2\right)$ d v s $f(x) \to \infty\,,\ x \to \pm\infty$, $f(0) = 0$ och att $f(\pm\sqrt{e-1}) = 2-e$. Detta ger grafen



Svar: Graf enligt ovan. f har lokala och globala minimipunkter i $x = \pm\sqrt{e-1}$ (med det gemensamma lokala och globala minimivärdet $f(\pm\sqrt{e-1}) = 2-e$) samt en lokal maximipunkt i $x = 0$ (med det lokala maximivärdet $f(0) = 0$). Globala maximipunkter saknas.

2a) Eulers formler ger (C är en godtycklig konstant)

$$\int \sin x \cos 3x\, dx = \int \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \cdot \frac{e^{i3x}+e^{-i3x}}{2}\, dx = \int \frac{e^{i4x}-e^{i2x}+e^{-i2x}-e^{-i4x}}{4i}\, dx$$
$$= \int \left(\frac{1}{2}\sin 4x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) dx = \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{8}\cos 4x + C.$$

2b) $\displaystyle\int \frac{x+4}{8+8x+4x^2}\, dx = \frac{1}{4}\int \frac{(x+1)+3}{1+(x+1)^2} + dx = \frac{1}{8}\ln(x^2+2x+2) + \frac{3}{4}\arctan(x+1) + C$ där C är en godtycklig konstant.

2c) Variabelbytet $t = e^x$, $dt = e^x\, dx$ ger (C är en godtycklig konstant)

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\, dx = \int \frac{dt}{t^2+1} = \arctan t + C = \arctan\left(e^x\right) + C.$$

Svar: (a) $\dfrac{\cos 2x}{4} - \dfrac{\cos 4x}{8} + C$ (b) $\dfrac{1}{8}\ln(x^2+2x+2) + \dfrac{3}{4}\arctan(x+1) + C$ (c) $\arctan(e^x) + C$.

3a) Standardgränsvärden ger

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\tan x}-1}{\ln(1-2x)} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{\tan x}-1}{\tan x}\cdot\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\frac{\ln(1-2x)}{-2x}\cdot(-2)} = 1\cdot\frac{1}{1}\cdot 1\cdot\frac{1}{1\cdot(-2)} = -\frac{1}{2}.$$

3b) $\dfrac{x+\ln(1+e^x)}{\sqrt{1+2x}+e^{1+\ln x}} = \dfrac{x+\ln e^x+\ln(1+e^{-x})}{\sqrt{1+2x}+ex} = \dfrac{2+\frac{1}{x}\ln(1+e^{-x})}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}}+e} \to \dfrac{2+0\cdot 0}{\sqrt{0}+e} = \dfrac{2}{e}\,, x\to\infty.$

3c) $\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \ln 3x = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\Big(1+\sqrt{x}\ln 3 + x^{1/2}\ln x\Big) \to \infty\,,\ x\to 0^+$ ty parentesen $\to 1$ (standardgrv).

Svar: (a) $-\dfrac{1}{2}$ (b) $\dfrac{2}{e}$ (c) ∞.

4a) Se kursboken.

4b) Enligt 4a) samt binomialsatsen är

$$\frac{d}{dx}(1+x^3) = \lim_{h\to 0}\frac{1+(x+h)^3-(1+x^3)}{h} = \lim_{h\to 0}\big(3x^2+3xh+h^2\big) = 3x^2.$$

4c) Låt $t = \sqrt{x+h}-\sqrt{x}$ så att $t\to 0\,,\ h\to 0$. Standardgränsvärden ger (för $x>0$)

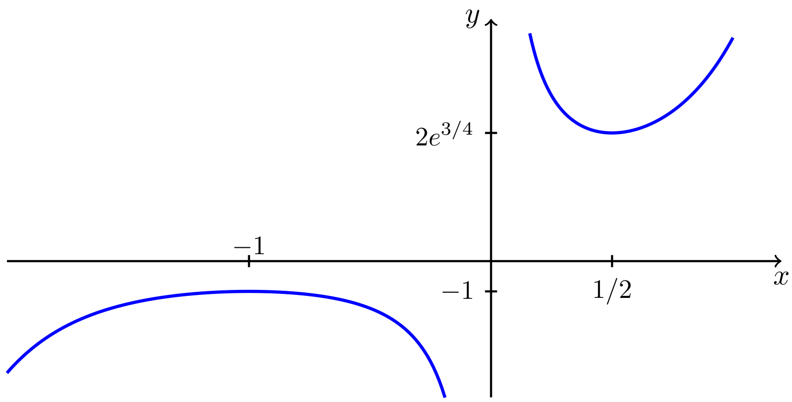
$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}e^{\sqrt{x}} &= \lim_{h\to 0}\frac{e^{\sqrt{x+h}}-e^{\sqrt{x}}}{h} = \lim_{h\to 0} e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{e^t-1}{t}\cdot\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\\ &= \lim_{h\to 0} e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{e^t-1}{t}\cdot\frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h\to 0} e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{e^t-1}{t}\cdot\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

Svar: (a) Se kursboken (b) $3x^2$ (c) $\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$ för $x>0$.

5) Då $x=0$ inte är en lösning för något värde på k är ekvationen ekvivalent med $f(x)=k$ där vi satt $f(x) = \dfrac{e^{x+x^2}}{x}$. Standardräkningar (genomför dessa!) ger $f'(x) = \dfrac{(2x-1)(x+1)}{x^2}e^{x+x^2}$. Vidare är $f(x)\to\pm\infty\,,\ x\to 0^{\pm}$ och $f(x) = \dfrac{e^{x+x^2}}{x+x^2}\cdot(1+x)\to\pm\infty\,,\ x\to\pm\infty$. Teckentabell:

x		-1		0		$1/2$	
$2x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
x^2	$+$		$+$	0	$+$		$+$
e^{x+x^2}	$+$		$+$		$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	ej def.	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	ej def.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

Beräkning av funktionsvärdena $f(-1)=-1$ och $f(1/2)=2e^{3/4}$ ger grafen



Avläsning i grafen ger nu antalet lösningar för olika k.

Svar: Inga lösningar om $-1 < k < 2e^{3/4}$. 1 lösning om $k = -1$ eller om $k = 2e^{3/4}$. 2 lösningar om $k < -1$ eller $k > 2e^{3/4}$.

6) Dela intervallet $[n, 2n]$ i lika långa delintervall av längd 1. Rita en figur (Gör detta!!!) med naturliga över- och undertrappor till $y = \ln(x/n)$ på $[n, 2n]$. Denna figur ger olikheterna

$$\sum_{k=n}^{2n-1} \ln\frac{k}{n} \le \int_n^{2n} \ln\frac{x}{n}\,dx \le \sum_{k=n+1}^{2n} \ln\frac{k}{n}.$$

Nu är $\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n} \ln\frac{k}{n} = \frac{\ln 2}{n} + \frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1} \ln\frac{k}{n} \le \frac{\ln 2}{n} + \frac{1}{n}\int_n^{2n} \ln\frac{x}{n}\,dx$ och $\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n} \ln\frac{k}{n} = \frac{\ln 1}{n} + \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n} \ln\frac{k}{n} \ge \frac{1}{n}\int_n^{2n} \ln\frac{x}{n}\,dx$ enligt ovan. Dessutom ger variabelbytet $t = x/n$, $dx = n\,dt$ att $\frac{1}{n}\int_n^{2n} \ln\frac{x}{n}\,dx = \int_1^2 \ln t\,dt = [t\ln t]_1^2 - \int_1^2 t\cdot\frac{1}{t}\,dt = 2\ln 2 - 1$ d v s $2\ln 2 - 1 \le \frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n} \ln\frac{k}{n} \le \frac{\ln 2}{n} + 2\ln 2 - 1$ så instängningsregeln ger att $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n} \ln\frac{k}{n} = 2\ln 2 - 1$.

Svar: $2\ln 2 - 1$.

7) Sätt $g(x) = xf'(x) + f(x)$. Då är $g(x) = (xf(x))'$ enligt produktregeln. Enligt insättningsformeln är $f(x) = \frac{1}{x}(xf(x) - 0\cdot f(0)) = \frac{1}{x}\int_0^x g(t)\,dt$. Låt $\varepsilon > 0$. Då $g(t) \to 0\,,\ t \to \infty$ finns $\omega_1 > 0$ så att $|g(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$ för $t > \omega_1$ och enligt ovan är $f(x) = \frac{1}{x}\int_0^{\omega_1} g(t)\,dt + \frac{1}{x}\int_{\omega_1}^x g(t)\,dt$. Då första termen $\to 0\,,\ x \to \infty$ finns ω_2 så att $\left|\frac{1}{x}\int_0^{\omega_1} g(t)\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ för $x > \omega_2$. För $x > \omega := \max(\omega_1, \omega_2)$ gäller då $|f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{x}\int_{\omega_1}^x |g(t)|\,dt < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{x-\omega_1}{x}\cdot\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, vilket visar att $f(x) \to 0\,,\ x \to \infty$.

Svar: Se ovan.