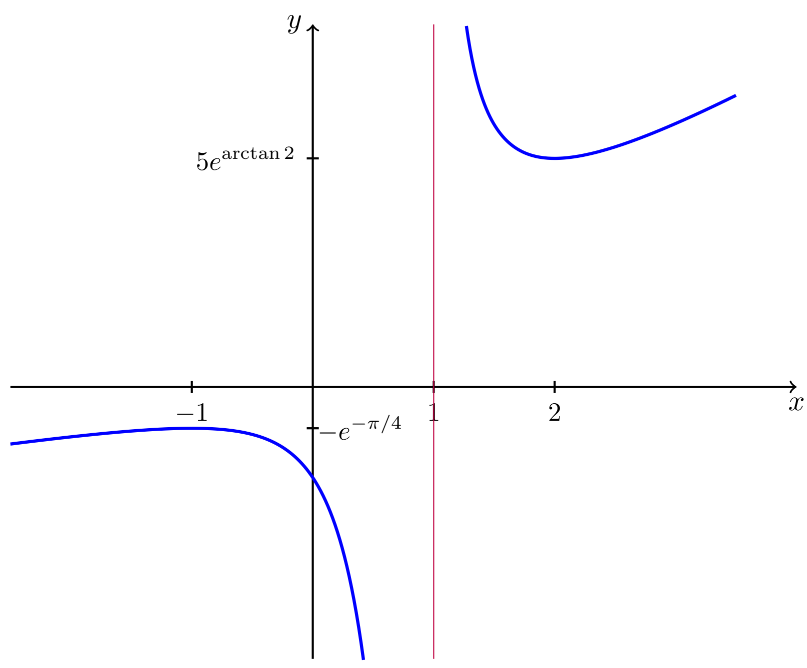
Lösningsskisser för TATA41 210612 (förmiddag)

1) f är definierad för $x \neq 1$. Standardräkningar (genomför dessa!) ger $f'(x) = \dfrac{(x+1)(x-2)}{(x-1)^2}e^{\arctan x}$.

Teckentabell:

x		-1		1		2	
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$(x-1)^2$	$+$		$+$	0	$+$		$+$
$e^{\arctan x}$	$+$		$+$		$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	ej def.	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	ej def.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

Vi ser att $f(x) = x \cdot \dfrac{1+1/x^2}{1-1/x}e^{\arctan x} \to \pm\infty\,,\ x \to \pm\infty$ och att $f(x) \to \pm\infty\,,\ \to x \to 1^{\pm}$.
Vidare är $f(-1) = -e^{-\pi/4}$ och $f(2) = 5e^{\arctan 2}$. Detta ger grafen



Svar: Graf enligt ovan. Linjen $x = 1$ är en lodrät asymptot. Vågräta asymptoter saknas. f har en lokal maximipunkt i $x = -1$ (med det lokala maximivärdet $f(-1) = -e^{-\pi/4}$) och en lokal mimimipunkt i $x = 2$ (med det lokala minimivärdet $f(2) = 5e^{\arctan 2}$).

2a) Variabelbytet $t = \sin 3x$, $dt = 3\cos 3x\, dx$ ger (C är en godtycklig konstant)

$$\int \cos^5 3x\, dx = \int (1-\sin^2 3x)^2 \cos 3x\, dx = \frac{1}{3}\int (1-t^2)^2\, dt = \frac{t}{3} - \frac{2t^3}{9} + \frac{t^5}{15} + C$$
$$= \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{2}{9}\sin^3 3x + \frac{1}{15}\sin^5 3x + C.$$

2b) En partialintegration ger (C är en godtycklig konstant)

$$\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx = x\tan x - \int \tan x\,dx = x\tan x + \int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx = x\tan x + \ln|\cos x| + C.$$

2c) Variabelbytet $t = 1 + x^3$, $dt = 3x^2\,dx$ ger (C är en godtycklig konstant)

$$\int x^2\ln(1+x^3)\,dx = \frac{1}{3}\int \ln t\,dt = \frac{t}{3}\ln t - \frac{1}{3}\int t\cdot\frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{3}(1+x^3)\ln(1+x^3) - \frac{x^3}{3} + C.$$

Svar: (a) $\dfrac{\sin 3x}{3} - \dfrac{2\sin^3 3x}{9} + \dfrac{\sin^5 3x}{15} + C$ (b) $x\tan x + \ln|\cos x| + C$ (c) $\dfrac{1+x^3}{3}\ln(1+x^3) - \dfrac{x^3}{3} + C$.

3a) Variabelbytet $t = 2/x \to 0\,,\ x \to \infty$ och ett standardgränsvärde ger

$$\lim_{x\to\infty}\left(xe^{2/x} - x\right) = \lim_{t\to 0} 2\cdot\frac{e^t - 1}{t} = 2\cdot 1 = 2.$$

3b) $\ln(1+\sqrt{x})\cdot\ln x = \dfrac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\cdot x^{1/2}\ln x \to 1\cdot 0 = 0\,, x \to 0$ enligt standardgränsvärden.

3c) Variabelbytet $t = -x \to \infty\,,\ x \to -\infty$ ger

$$\frac{\ln(e^x - x)}{\ln(-x)} = \frac{\ln(e^{-t} + t)}{\ln t} = \frac{\ln t + \ln(1 + e^{-t}/t)}{\ln t} = 1 + \frac{\ln(1 + e^{-t}/t)}{\ln t} \to 1\,,\ x \to -\infty.$$

Svar: (a) 2 (b) 0 (c) 1.

4) Eftersom $e^{-3a} \to 0\,,\ a \to \infty$ är ($I =$ sökt integral)

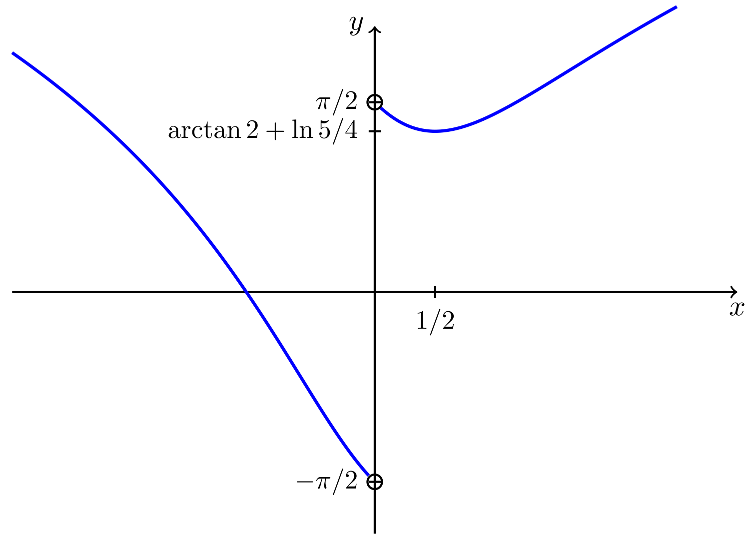
$$I = \lim_{a\to\infty}\int_1^a \frac{e^{-3x}}{1+e^{-3x}}dx = \lim_{a\to\infty}\left[-\frac{1}{3}\ln\left(1+e^{-3x}\right)\right]_1^a = \frac{1}{3}\ln(1+e^{-3}) - \frac{1}{3}\ln(1+0) = \frac{1}{3}\ln(1+e^{-3}).$$

Svar: Integralen är konvergent med värdet $\dfrac{1}{3}\ln(1+e^{-3})$.

5) Sätt $f(x) = \arctan\dfrac{1}{x} + \ln(1+x^2)$. f är definierad för $x \neq 0$ och ekvationen är ekvivalent med $f(x) = k$. Standardräkningar (genomför dessa!) ger $f'(x) = \dfrac{2x-1}{1+x^2}$ och $\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = \pm\dfrac{\pi}{2}$ och $f(x) \to \infty\,,\ x \to \pm\infty$. Teckentabell:

x		0		1/2	
$1+x^2$	+		+		+
$2x-1$	$-$		$-$	0	+
$f'(x)$	$-$	ej def.	$-$	0	+
$f(x)$	$\searrow$	ej def.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

Beräkning av funktionsvärdet $f(1/2) = \arctan 2 + \ln\dfrac{5}{4}$ ger grafen



Avläsning i grafen (Obs: $f(0)$ är *ej* definierat!) ger nu antalet lösningar för olika k.

Svar: Inga lösningar om $k \leq -\frac{\pi}{2}$. 1 lösning om $-\frac{\pi}{2} < k < \arctan 2 + \ln \frac{5}{4}$. 2 lösningar om $k = \arctan 2 + \ln \frac{5}{4}$ eller $k \geq \frac{\pi}{2}$. 3 lösningar om $\arctan 2 + \ln \frac{5}{4} < k < \frac{\pi}{2}$.

6a) Se kursboken.

6b) Låt $x, y \in]a, b[$. Medelvärdessatsen ger att det finns ett tal ξ mellan x och y så att $f(x) - f(y) = f'(\xi)(x-y)$. Men då är $\xi \in]a, b[$ så $f'(\xi) = 0$, vilket ger $f(x) = f(y)$. Då x och y var godtyckliga följer att f är konstant på $]a, b[$.

6c) Sätt $G(x) = F_1(x) - F_2(x)$. Om $x \in]a, b[$ är $G'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Enligt 6b) är då $G(x) = C =$ konstant på $]a, b[$ vilket ger $F_1(x) = F_2(x) + C$ för $x \in]a, b[$.

Svar: Se ovan.

7) En partialintegration ger

$$x^2 \int_x^1 \frac{\cos t}{t^3}\, dt = x^2 \left[-\frac{\cos t}{2t^2} \right]_x^1 - x^2 \int_x^1 \frac{\sin t}{2t^2}\, dt = \frac{1}{2} \cos x - \frac{x^2}{2} \cos 1 - \frac{x^2}{2} \int_x^1 \frac{\sin t}{t^2}\, dt.$$

För $0 \leq t \leq 1$ ger olikheten $0 \leq \sin t \leq t$ att

$$0 \leq x^2 \int_x^1 \frac{\sin t}{t^2}\, dt = x^2 \int_x^1 \frac{\sin t}{t} \cdot \frac{1}{t}\, dt \leq x^2 \int_x^1 \frac{1}{t}\, dt = -x^2 \ln x \to 0\,,\ x \to 0^+,$$

enligt ett standardgränsvärde. Instängningsregeln ger då $\lim_{x \to 0^+} x^2 \int_x^1 \frac{\sin t}{t^2}\, dt = 0$, varför

$$\lim_{x \to 0^+} x^2 \int_x^1 \frac{\cos t}{t^3}\, dt = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{2} \cos x - \frac{x^2}{2} \cos 1 - \frac{x^2}{2} \int_x^1 \frac{\sin t}{t^2}\, dv \right) = \frac{1}{2}.$$

Svar: $\frac{1}{2}$.