LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen

TATA41
TEN1

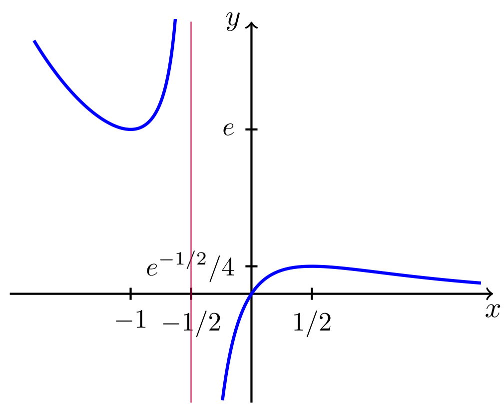
Lösningsskisser för TATA41 210613

1) f är definierad för $x \neq -\dfrac{1}{2}$. Standardräkningar (Genomför dessa!) ger $f'(x) = \dfrac{(x+1)(1-2x)}{(2x+1)^2}e^{-x}$.

Teckentabell:

x		-1		$-1/2$		$1/2$	
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$1-2x$	$+$		$+$		$+$	0	$-$
$(2x+1)^2$	$+$		$+$	0	$+$		$+$
e^{-x}	$+$		$+$		$+$		$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	ej def.	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$	ej def.	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

Vi ser att $f(x) = \dfrac{1}{2+1/x}e^{-x}$ d v s $f(x) \to 0\,,\ x \to \infty$ och $f(x) \to \infty\,,\ x \to -\infty$. Vidare följer att $f(x) \to \mp\infty\,,\ \to x \to -1/2^{\pm}$, $f(-1) = e$ och $f(1/2) = \dfrac{e^{-1/2}}{4}$. Detta ger grafen



Svar: Graf enligt ovan. Linjen $x = -1/2$ är en lodrät asymptot och linjen $y = 0$ är en vågrät asymptot då $x \to \infty$. f har en lokal minimipunkt i $x = -1$ (med det lokala minimivärdet $f(-1) = e$) och en lokal maximipunkt i $x = \dfrac{1}{2}$ (med det lokala maximivärdet $f(1/2) = \dfrac{e^{-1/2}}{4}$).

2a) Uppdelning i två termer, variabelbytet $t = x^2$, $dt = 2x\,dx$ i första termen, samt en partialintegration i andra termen ger (C är en godtycklig konstant)

$$\int x\left(e^{x^2} - e^x\right)\,dx = \frac{1}{2}\int e^t\,dt - xe^x + \int e^x\,dx = \frac{1}{2}e^{x^2} - xe^x + e^x + C.$$

2b) En partialintegration ger $\displaystyle\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}\ln x - 2\int \sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}\,dx = 2\sqrt{x}(\ln x - 2) + C$, där C är en godtycklig konstant.

2c) Partialbråksuppdelning ger (C är en godtycklig konstant)

$$\int \frac{4x^2+9x+4}{x^3+4x^2+4x}\,dx = \int \left(\frac{1}{x}+\frac{3}{x+2}-\frac{1}{(x+2)^2}\right)dx = \ln|x|+3\ln|x+2|+\frac{1}{x+2}+C.$$

Svar: (a) $\frac{1}{2}e^{x^2}+(1-x)e^x+C$ (b) $2\sqrt{x}(\ln x-2)+C$ (c) $\ln|x|+3\ln|x+2|+\frac{1}{x+2}+C.$

3a) Standardgränsvärden ger

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^{2x}-1)\ln(1+x^2)}{\sin(x^3)} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot 2\cdot\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\cdot\frac{1}{\frac{\sin(x^3)}{x^3}} = 1\cdot 2\cdot 1\cdot\frac{1}{1}=2.$$

3b) Substitutionen $t=\frac{1}{\sqrt{x}}\to\infty\,,\ x\to 0^+$ ger $x^3e^{1/\sqrt{x}}=\frac{e^t}{t^6}\to\infty\,, x\to 0^+$(standardgränsvärde).

3c) $(2^n+3^n)^{1/n}=3\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)^{1/n}=3\exp\left(\frac{1}{n}\ln\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)\right)\to 3\exp(0\cdot 0)=3\,,\ n\to\infty$

Svar: (a) 2 (b) ∞ (c) 3.

4) Variabelbyte $t=-x$, $dt=-dx$, en partialintegration följd av partialbråksuppdelning ger

$$\begin{aligned}\int_{-\omega}^{-1}\frac{1}{x^3}\ln(1+x^2)\,dx &= -\int_1^{\omega}\frac{1}{t^3}\ln(1+t^2)\,dt = \left[\frac{\ln(1+t^2)}{2t^2}\right]_1^{\omega}-\int_1^{\omega}\frac{2t}{2t^2(1+t^2)}\,dt\\ &= \frac{1}{2\omega^2}\ln(1+\omega^2)-\frac{\ln 2}{2}-\int_1^{\omega}\left(\frac{1}{t}-\frac{t}{1+t^2}\right)dt\\ &= \frac{1}{2\omega^2}\ln(1+\omega^2)-\frac{\ln 2}{2}-\left[\ln|t|-\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_1^{\omega}\\ &= \frac{\ln\omega}{\omega^2}+\frac{1}{2\omega^2}\ln(1+1/\omega^2)-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{1+1/\omega^2}\right)-\ln 2\to-\ln 2\,,\ \omega\to\infty,\end{aligned}$$

enligt standardgränsvärde. Detta ger $\int_{-\infty}^{-1}\frac{1}{x^3}\ln(1+x^2)\,dx=\lim_{\omega\to\infty}\int_{-\omega}^{-1}\frac{1}{x^3}\ln(1+x^2)\,dx=-\ln 2.$

Svar: Integralen är konvergent med värdet $-\ln 2$.

5a) Se kursboken.

5b) $x^{\sqrt{x}}$ är kontinuerlig för $x>0$ och då $1-3x>1$ för $x<0$ är f kontinuerlig för $x<0$. f är dessutom kontinuerlig i $x=0$ om och endast om $\lim_{x\to 0^-}f(x)=f(0)=\lim_{x\to 0^+}f(x)$ (*). Andra likheten i (*) ger då att $A=\lim_{x\to 0^+}x^{\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}e^{\sqrt{x}\ln x}=e^0=1$ enligt ett standardgränsvärde. Observera att $B=0$ ger $f(x)=0\neq A$ för alla $x<0$. $B=0$ löser alltså inte problemet. För $B\neq 0$ får vi

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\arctan Bx}-1}{\arctan Bx}\cdot\frac{\arctan Bx}{Bx}\cdot\frac{B}{-3}\frac{1}{\frac{\ln(1-3x)}{-3x}}=1\cdot 1\cdot\left(-\frac{B}{3}\right)\cdot\frac{1}{1}=-\frac{B}{3},$$

enligt ett flertal standardgränsvärden. Första likheten i (*) ger därför att $B=-3$.

Svar: (a) Se kursboken. (b) f är kontinuerlig på $\mathbf{R}$ om och endast om $A = 1$ och $B = -3$.

6) Börja med att rita en figur! Låt $0 < a \leq 2$. Tangenten till kurvan i punkten $(a, 4 - a^2)$ har lutningen $-2a$. Tangentens ekvation i denna punkt blir därför $y - 4 + a^2 = -2a(x - a)$. Tangenten skär därför y-axeln i en punkt där $y = a^2 + 4$ och x-axeln i en punkt där $x = \dfrac{a^2+4}{2a}$.

Den sökta triangelarean blir därför (Detta bör framgå av din figur!) $\dfrac{(a^2+4)^2}{4a} =: g(a)$, där $0 < a \leq 2$, och vi söker värdemängden V_g till g.

Derivering ger (Genomför detaljerna!) $g'(a) = \dfrac{(a^2+4)(3a^2-4)}{4a^2}$, så $g'(a) = 0$ då $a = 2/\sqrt{3}$, $g'(a) < 0$ då $0 < a < 2/\sqrt{3}$ och $g'(a) > 0$ då $2/\sqrt{3} < a \leq 2$. Dessutom gäller att $g(a) \to \infty$ då $a \to 0^+$ och $g(2) = 8$. Det följer att $V_g = \left[g(2/\sqrt{3}), \infty\right[= \left[\dfrac{32\sqrt{3}}{9}, \infty\right[$

Svar: Arean kan anta alla värden i intervallet $\left[\dfrac{32\sqrt{3}}{9}, \infty\right[$.

7) Observera att $\dfrac{1}{k^2+\sin(k^2)} < \dfrac{1}{k^2-1}$ för $k = 2, 3, \ldots$. Betrakta därför funktionen $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$ för $x \geq 2$. I en omsorgsfullt ritad figur (Rita denna!!!) ser vi att $\sum_{k=3}^{n} \dfrac{1}{k^2-1}$ utgör en undertrappa till f på intervallet $[2, n]$ varför

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k^2-1} \leq \int_2^n \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\int_2^n \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) dx = \frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right]_2^n = \frac{1}{2}\ln\frac{n-1}{n+1} - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{3} < \frac{1}{2}\ln 3,$$

eftersom $\dfrac{n-1}{n+1} < 1$. Detta ger

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+\sin(k^2)} < \frac{1}{1+\sin 1} + \frac{1}{4+\sin 4} + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k^2-1} < 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\ln 3 = \frac{4}{3} + \frac{1}{2}\ln 3 =: C,$$

där vi har använt att $0 < 1 < \dfrac{\pi}{2}$.

Svar: $C = \dfrac{4}{3} + \dfrac{1}{2}\ln 3$ duger.

Alternativ: Betrakta

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+\sin(k^2)} < 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1} = 1 + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 + \frac{1}{2}\left(\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-4} - \frac{1}{n-2}\right) + \left(\frac{1}{n-3} - \frac{1}{n-1}\right) + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right)\right) = 1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) < 1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{4}.$$

så $C = \dfrac{7}{4}$ duger, vilket är mindre än värdet ovan $\left(\dfrac{4}{3} + \dfrac{1}{2}\ln 3 \approx 1.883,\ \dfrac{7}{4} = 1.75\right)$.